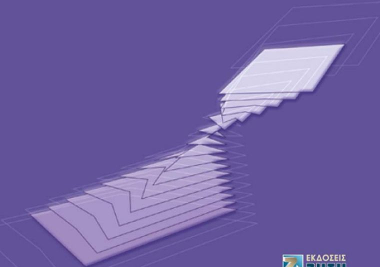
Δ. Δημητροπούλου - Ψωμοπούλου

Λογισμός Διαφορικών Μορφών

στην Ευκλείδεια Πολλαπλότητα



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από τον συγγραφέα

Δεύτερη έκδοση 1993

ISBN 960-431-204-9

Φωτοστοιχειοθεσία-Εκτύπωση:	*Βιβλιοπωλείο:*
Π. ΖΗΤΗ & ΣΙΑ Ο.Ε.	**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ**
Σόλωνος 79-81 ☎ και Fax 825 453, 849 178, 542 48 Θεσσαλονίκη	Αρμενοπούλου 27 ☎ 203 720 546 35 Θεσσαλονίκη

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό αναφέρεται στη μελέτη των Διαφορικών Μορφών επί του $\mathbb{R}^n$*, και περιέχει την ύλη που διδάσκεται στο μάθημα επιλογής "Διαφορικές Μορφές" του Στ εξαμήνου του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.*

Στη νέα του έκδοση γίνονται κάποιες προσθήκες στο περιεχόμενο του και μικρές αλλαγές, ώστε να υπάρχει ολοκληρωμένη εικόνα των εννοιών που χρησιμοποιούνται και να είναι αυτοτελές.

Περιέχει βασικά στοιχεία του Λογισμού των Διαφορικών Μορφών, δηλαδή περισσότερο τις έννοιες που το συγκροτούν παρά αποδείξεις πολύπλοκων θεωρημάτων –που άλλωστε είναι ελάχιστα– και που παρουσιάζονται σε απλούστερη μορφή. Χρησιμοποιούνται, κυρίως συμβολισμοί με τη βοήθεια συντεταγμένων που απλουστεύουν τους υπολογισμούς, ενώ συμβολισμοί χωρίς τη χρήση δεικτών αναφέρονται στην περίπτωση που δίνουν αξιοσημείωτα αποτελέσματα. Κάποια στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας και Ανάλυσης παρατίθενται για να εισάγουν έννοιες και αποτελέσματα απαραίτητα στα επόμενα.

Περιλαμβάνει τέσσερα κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο αναφέρει τα εισαγωγικά στοιχεία του Αλγεβρικού Τανυστικού Λογισμού, δηλαδή της θεωρίας διανυσματικών χώρων που δίνει τεχνικές για την οργάνωση και διατύπωση εννοιών με όσο το δυνατόν λιγότερα σύμβολα.

Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται αποκλειστικά στους τελείως αντισυμμετρικούς τανυστές και τις πράξεις τους, δηλαδή στην εξωτερική άλγεβρα των τανυστών.

Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια των διαφορικών μορφών και γίνεται η μελέτη τους, πάντοτε επί του χώρου $\mathbb{R}^n$*, ώστε να μην αναφερθεί κανείς καθόλου σε πολλαπλότητες, που είναι αντικείμενο μελέτης άλλων μαθημάτων επόμενων εξαμήνων.*

Τέλος, το τέταρτο κεφάλαιο αφιερώνεται αποκλειστικά στην ολοκλήρωση των διαφορικών μορφών, αρχικά στον διδιάστατο και τριδιάστατο χώρο, ώστε να αναγνωρίζει κανείς οικείους τύπους που εκφράζονται με τη βοήθεια διαφορικών μορφών, και να γίνεται ευκολό-

τερα κατανοητή η γενίκευσή τους στον χώρο $\mathbb{R}^n$*, που ακολουθεί.*

Καθένα κεφάλαιο συμπληρώνεται με παραδείγματα και απλές ασκήσεις.

Θεσσαλονίκη, 1993 *Δ. Δημητροπούλου - Ψωμοπούλου*

Περιεχόμενα

1

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΑΝΥΣΤΩΝ

1.1. Συμβολισμοί του πραγματικού διανυσματικού χώρου E_n

Θεωρούμε τον n-διάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο E_n. Συμφωνούμε στα διανύσματα του E_n να χρησιμοποιούμε βέλος ( ) πάνω από το γράμμα που τα παριστά. Συμβολίζουμε,

(1.1.1) $$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \quad ή \quad \{e_i\}_{i=1, 2, \ldots, n}$$

μια **βάση** του. Τότε για το τυχόν διάνυσμα x E_n, θα υπάρχουν n πραγματικοί αριθμοί, οι συνιστώσες του, ώστε να γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός αυτής της βάσης. Δηλαδή, αν

(1.1.2) $$\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}, \quad ή \quad \{x^i\}_{i=1, 2, \ldots, n}$$

είναι οι **συνιστώσες** του, γράφουμε

(1.1.3) $$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \ldots + x^n e_n = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i .$$

Όπως παρατηρεί κανείς στη βάση (1.1.1) οι δείκτες βρίσκονται στην κάτω θέση του γράμματος e, ενώ στις συνιστώσες (1.1.2) έχουν γραφεί στην άνω θέση. Χρησιμοποιώντας αυτούς τους συμβολισμούς, στο άθροισμα (1.1.3) μπορεί να μην γραφεί το σύμβολο Σ δηλαδή,

(1.1.4) $$x = x^i e_i ,$$

υιοθετώντας τον **συμβολισμό του Einstein,** που διατυπώνεται ως εξής:
"Αν σ' ένα γινόμενο παραγόντων εμφανίζεται ο **ίδιος** δείκτης δύο φορές, σ' ένα παράγοντα στην **άνω** θέση, και σ' άλλον παράγοντα στην **κάτω** θέση, τότε έχουμε **άθροιση** ως προς αυτόν τον επαναλαμβανόμενο δείκτη".

Ορισμός 1.1.1.

Οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες λέγονται **βωβοί** ή **αθροιστικοί δείκτες** γιατί το γράμμα που τους παριστά μπορεί ν' αντικατασταθεί από οιοδήποτε άλλο, οποτεδήποτε χρειαστεί.

Συνεπώς η σχέχη (1.1.4) γράφεται ακόμη,

$$x^i e_i = x^j e_j = x^k e_k \quad \text{κ.λπ.} \tag{1.1.5}$$

Παρατήρηση 1.1.1. Ο συμβολισμός του Einstein, χρησιμοποιώντας με τον παραπάνω τρόπο τους δείκτες, καταργεί το αθροιστικό σύμβολο και απλοποιεί τη γραφή πολλαπλών αθροισμάτων. Στα επόμενα θα εφαρμόζεται:

i) Στην άθροιση ως προς ένα βωβό δείκτη. Δηλαδή εκφράσεις της μορφής,

$$\alpha_i b^i = \alpha_j b^j = \alpha_k b^k \quad \text{κ.λπ.},$$

που έχουν τον ίδιο δείκτη, κάτω στον ένα παράγονται και άνω στον άλλο παράγοντα, δεν θα σημαίνουν γινόμενο δύο παραγόντων, αλλά άθροισμα γινομένων με n όρους,

$$\alpha_1 b^1 + \alpha_2 b^2 + \ldots + \alpha_n b^n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b^i.$$

Όμοια, αν ο ίδιος δείκτης βρίσκεται στον ίδιο παράγοντα σε μια άνω και κάτω θέση, δηλαδή

$$\alpha_i^i = \alpha_j^j = \alpha_k^k \quad \text{κ.λπ.},$$

θα σημαίνει το άθροισμα με n όρους

$$\alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^i.$$

ii) Στην άθροιση ως προς δύο ή και περισσότερους βωβούς δείκτες. Δηλαδή, εκφράσεις της μορφής

$$\alpha^{ij} b_i c_j = \alpha^{k\lambda} b_k c_\lambda = \alpha^{\varrho\sigma} b_\varrho c_\sigma \quad \text{κ.λπ.},$$

θα σημαίνουν άθροισμα γινομένων με n^2 όρους,

$$\alpha^{11} b_1 c_1 + \alpha^{12} b_1 c_2 + \alpha^{13} b_1 c_3 + \ldots + \alpha^{nn} b_n c_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha^{ij} b_i c_j.$$

Γενικότερα, ο αριθμός των επαναλαμβανομένων δεικτών σε άνω και κάτω θέση δίνουν τον αριθμό των αθροίσεων που γίνονται κάθε φορά.

Στις σπάνιες περιπτώσεις που χρειάζεται ο γενικός όρος του αθροίσματος (ή των αθροισμάτων) ή οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες δεν αθροίζονται, θα γίνεται ιδιαίτερη αναφορά.

Παράδειγμα 1.1.1. Σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει η ισότης,

$$(\alpha_{ij}+\alpha_{ji})\, x^i x^j = 2\alpha_{ij} x^i x^j.$$

Πραγματικά,

$$(\alpha_{ij}+\alpha_{ji})\, x^i x^j = \alpha_{ij} x^i x^j + \alpha_{ji} x^i x^j.$$

Αλλά

$$\alpha_{ji} x^i x^j = \alpha_{ij} x^j x^i,$$

με αμοιβαία αλλαγή των βωβών δεικτών i και j. Δηλαδή

$$(\alpha_{ij}+\alpha_{ji}) x^i x^j = \alpha_{ij} x^i x^j + \alpha_{ij} x^j x^i$$

που δίνει το ζητούμενο, εφόσον

$$x^j x^i = x^i x^j.$$

Ορισμός 1.1.2.

Κάθε διάνυσμα x του πραγματικού διανυσματικού χώρου E_n λέγεται **αντιαλλοίωτο διάνυσμα** ή **αντιαλλοίωτος τανυστής πρώτης τάξης του E_n** ή **τανυστής τύπου $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$ του E_n**.

Η εξήγηση για την ονομασία τανυστής θα γίνει σε επόμενες παραγράφους. Θα δικαιολογήσουμε, ήδη, την έκφραση "αντιαλλοίωτος" του παραπάνω ορισμού που προκύπτει από τον τρόπο μετασχηματισμού των συνιστωσών του x σε μια αλλαγή βάσης.

Μια νέα βάση του E_n, συμβολίζεται με το ίδιο γράμμα e όπως η αρχική, εφοδιασμένο όμως με ένα **τόνο** στον δείκτη του. Δηλαδή,

(1.1.6) $$\{e_{1'}, e_{2'}, \ldots, e_{n'}\} \quad ή \quad \{e_{j'}\}_{j=1,2,\ldots,n}$$

είναι μια άλλη βάση του πραγματικού διανυματικού χώρου E_n. Σ' αυτήν την βάση, το διάνυσμα x, σύμφωνα με τον συμβολισμό του Einstein, γράφεται

(1.1.7) $$x = x^{j'} e_{j'},$$

όπου

(1.1.8) $$\{x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}\} \quad ή \quad \{x^{j'}\}_{j=1,2,\ldots,n}$$

είναι οι νέες συνιστώσες του x .

Θα δώσουμε, ήδη τις σχέσεις που συνδέουν τα $\{x^i\}$ και $\{x^j\}$. Ισχύει,

$$x^j e_j = x^i e_i. \tag{1.1.9}$$

Εξάλλου, κάθε διάνυσμα της βάσης $\{e_j\}$ σαν διάνυσμα του χώρου E_n, είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\{e_i\}$ δηλαδή,

$$e_j = A^i_j e_i, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1.10}$$

Ο δείκτης j στο β μέλος της σχέσης (1.1.10) βρίσκεται στην κάτω θέση και **δεν** επαναλαμβάνεται σε μια άνω θέση, δηλαδή δεν είναι βωβός δείκτης. Στην ίδια θέση βρίσκεται και στο α μέλος αυτής της σχέσης.

Ορισμός 1.1.3.

Οι δείκτες που δεν είναι αθροιστικοί λέγονται **ελεύθεροι δείκτες** και δεν αλλάζει η ονομασία τους.

Παρατήρηση 1.1.2. Μια σχέση χαρακτηρίζεται απ' τους ελεύθερους δείκτες της. Συνεπώς όταν μια παράσταση εκφράζεται μ' ένα γράμμα, εφοδιάζεται με τους ίδιους ελεύθερους δείκτες στην ίδια θέση. Δηλαδή γράφουμε

$$\alpha^i = b^{ij}c_j, \quad \alpha_{ij} = b^k_{ik}c_j \quad \text{κ.λ.π.}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι δεν μπορεί βωβός δείκτης να πάρει την ονομασία ελεύθερου δείκτη στην ίδια παράσταση.

Στην σχέση (1.1.10) οι n^2 πραγματικοί αριθμοί A^i_j ορίζουν ένα τετραγωνικό πίνακα A με n γραμμές και n στήλες. Ο δείκτης i δείχνει τη γραμμή που ανήκει το στοιχείο και ο δείκτης j τη στήλη του. Δηλαδή

$$A = (A^i_j) \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Όμοια κάθε διάνυσμα της αρχικής βάσης $\{e_i\}$ είναι γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων της βάσης $\{e_j\}$, δηλαδή

$$e_i = A^j_i e_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1.11}$$

Είναι φανερό ότι οι n^2 πραγματικοί αριθμοί A^j_i, διαφορετικοί απ' τους A^i_j, ορίζουν έναν νέο n n πίνακα,

$$A \; = (A^j_i), \qquad i, j =1, 2,\dots, n,$$

αντίστροφο του πίνακα A. Πραγματικά η σχέση (1.1.10) με τη βοήθεια της σχέσης (1.1.11) γράφεται,

$$e_j \; = A^i_j \; A^k_i \; e_k$$

ή ακόμη,

$$\delta^k_j \; e_k \; = A^i_j \; A^k_i \; e_k$$

δηλαδή,

$$(A^i_j \;\; A^k_i - \delta^k_j) \; e_k \; = 0 \,,$$

όπου δ^i_j είναι το δέλτα του Kronecker.

Η τελευταία σχέση, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων $\{e_j \}$, δίνει ότι για το γινόμενο των πινάκων A και A ισχύει,

$$A^i_j \; A^k_i \; = \delta^k_j$$

ή σύντομα

(1.1.12) $$AA \; = I_n,$$

όπου $I_n = (\delta^i_j)_{i,\, j \,=\, 1,\, 2,\, 3,\dots,\, n}$ είναι ο μοναδιαίος n n πίνακας. Δηλαδή οι πίνακες A και A είναι αντίστροφοί, ομαλοί, n τάξης,

$$A \; = A^{-1}.$$

Αντικαθιστώντας, ήδη, στη σχέση (1.1.9) τη σχέση (1.1.11) προκύπτει

$$x^j \; e_j \; = x^i A^j_i \; e_j \,.$$

Δηλαδή

(1.1.13) $$x^j \; = A^j_i \; x^i, \qquad j=1, 2, \dots, n,$$

με πίνακα μετασχηματισμού τον A , **αντίστροφο** (σχ. (1.1.12)) του A, που είναι ο πίνακας μετασχηματισμού στη σχέση (1.1.10). Γι' αυτό το λόγο, οι συνιστώσες ενός διανύσματος του E_n λέγονται **αντιαλλοίωτοι** σε μια αλλαγή βάσης αυτού του χώρου.

Ακριβώς ανάλογα προκύπτει ότι,

(1.1.14) $$x^i = A^i_j \; x^j \,, \qquad i=1, 2, \dots, n.$$

Θεώρημα 1.1.1..

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε οι n ποσότητες $\{x^i\}$ που αντιστοιχούν στη βάση $\{e_i\}$ του χώρου E_n να είναι συνιστώσες ενός ορισμένου αντιαλλοίωτου διανύσματος είναι σε κάθε αλλαγή βάσης να μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις (1.1.13) και (1.1.14).

Απόδειξη

Αν x είναι ένα ορισμένο αντιαλλοίωτο διάνυσμα, δείχτηκε ότι οι συνιστώσες του $\{x^i\}$ και $\{x^j\}$ μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις (1.1.13) και (1.1.14). Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι

$$x = x^i e_i \qquad \text{και} \qquad x = x^j e_j .$$

Όμως, η δεύτερη σχέση, με τη βοήθεια της (1.1.10) γράφεται

$$x = x^j A_j^i e_i$$

ή ακόμη, λόγω της (1.1.14),

$$x = x^i e_i .$$

Δηλαδή

$$x = x .$$

Παρατήρηση 1.1.3. Οι τύποι μετασχηματισμού των συνιστωσών ενός διανύσματος του χώρου E_n μπορούν να δοθούν και με τη βοήθεια πινάκων. Έτσι, αν συμβολίσουμε

$$X = (x^i) , \quad i=1, 2,\dots, n \qquad \text{και} \qquad X = (x^j) , \quad j = 1, 2,\dots, n$$

τους πίνακες τύπου n 1 με στοιχεία τις συνιστώσες (1.1.2) και (1.1.8) αντίστοιχα του διανύσματος x E_n, τότε οι σχέσεις (1.1.13) και (1.1.14) γράφονται σύντομα

$$X = A^{-1}X \qquad \text{και} \qquad X = AX ,$$

ή αναλυτικά

$$\begin{matrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{matrix} = \begin{matrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots A_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_1^n & A_2^n & \dots A_n^n \end{matrix} \quad \begin{matrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{matrix}$$

και

$$\begin{matrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{matrix} = \begin{matrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots A_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_1^n & A_2^n & \dots A_n^n \end{matrix} \quad \begin{matrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{matrix} .$$

1.2. Ασκήσεις

1.2.1. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

$$\delta_{ij}x^i x^j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\delta_i^j\,\delta_k^i x^k, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

1.2.2. Αν $\begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}$ είναι ο πίνακας μετασχηματισμού $A = \left(A_j^i\right)$, $i, j=1, 2, 3$ σε μια αλλαγή βάσης του χώρου E_3, να δοθούν αναλυτικά οι τύποι μετασχηματισμού των συνιστωσών ενός διανύσματος $x \quad E_3$.

1.3. Συμβολισμοί της γραμμικής απεικόνισης πραγματικών διανυσματικών χώρων

Ορισμός 1.3.1.

Αν E_n και F_m είναι δύο πραγματικοί διανυσματικοί χώροι με διάσταση n και m αντίστοιχα, μια **γραμμική απεικόνιση** b του E_n στον F_m,

$$b: E_n \quad F_m$$

ικανοποιεί την σχέση

$$(1.3.1) \qquad b(\lambda^1 x_1+\lambda^2 x_2) = \lambda^1 b(x_1)+\lambda^2 b(x_2), \qquad x_i \quad E_n, \qquad \lambda^i \quad \mathbb{R}, \quad i=1, 2,$$

δηλαδή διατηρεί κάθε γραμμικό συνδυασμό.

Συμβολίζουμε $\{e_i\}_{i=1, 2, \ldots, n}$ και $\{f_\alpha\}_{\alpha=1, 2, \ldots, m}$ τις βάσεις των χώρων E_n και F_m αντίστοιχα. Τότε, οι εικόνες $b(e_i)$ των διανυσμάτων $\{e_i\}$ μέσω της απεικόνισης b, σαν διανύσματα του F_m θα είναι γραμμικός συνδυασμός της βάσης του, δηλαδή

$$(1.3.2) \qquad b(e_i) = b_i^\alpha f_\alpha, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Οι nm πραγματικοί αριθμοί b_i^α της παραπάνω σχέσης ορίζουν έναν $n \quad m$ πίνακα,

$$(1.3.3) \qquad B = (b_i^\alpha), \quad i=1, 2, \ldots, n, \quad \alpha=1, 2, \ldots, m,$$

ή αναλυτικά

$$\begin{matrix} b^1_1 & b^1_2 \dots b^1_n \\ b^2_1 & b^2_2 \dots b^2_n \\ \dots & \dots \quad \dots \\ b^m_1 & b^m_2 \dots b^m_n \end{matrix}$$

που αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση b.

Θεωρούμε, ήδη, τα διανύσματα x , y των χώρων E_n και F_m αντίστοιχα, τέτοια ώστε

(1.3.4) $$y = b(x).$$

Θα εκφράσουμε την παραπάνω σχέση με τη βοήθεια των συνιστωσών των x και y . Αν δηλαδή

(1.3.5) $$x = x^i e_i, \quad y = y^\alpha f_\alpha,$$

τότε η σχέση (1.3.4) γράφεται,

$$y^\alpha f_\alpha = b(x^i e_i)$$

που, λόγω της γραμμικότητας της b (σχ. (1.3.1)), δίνει

$$y^\alpha f_\alpha = x^i b(e_i).$$

Εξάλλου, βάσει της σχέσης (1.3.2),

$$y^\alpha f_\alpha = x^i b^\alpha_i f_\alpha.$$

Άρα, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων $\{f_\alpha\}$, προκύπτει η ζητούμενη σχέση,

(1.3.6) $$y^\alpha = b^\alpha_i x^i, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m,$$

που εκφράζει την α-συνιστώσα του y συναρτήσει των συνιστωσών του x . Αναλυτικά χρησιμοποιώντας πίνακες,

(1.3.7) $$\begin{matrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^m \end{matrix} = \begin{matrix} b^1_1 & b^1_2 \dots b^1_n \\ b^2_1 & b^2_2 \dots b^2_n \\ \dots & \dots \quad \dots \\ b^m_1 & b^m_2 \dots b^m_n \end{matrix} \quad \begin{matrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{matrix} ,$$

όπου τα x και y έχουν εκφραστεί με τη μορφή πινάκων τύπου m 1. Είναι φανερό ότι αν εκφραστούν με την μορφή πινάκων τύπου 1 m, η σχέση (1.3.6) γράφεται ακόμη.

$$(1.3.8) \qquad [y^1\ y^2 \ldots\ y^m] = [x^1\ x^2\ \ldots\ x^n] \begin{matrix} b_1^1 & b_1^2 \ldots & b_1^m \\ b_2^1 & b_2^2 \ldots & b_2^m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n^1 & b_n^2 \ldots & b_n^m \end{matrix} .$$

1.4. Συμβολισμοί του δυϊκού χώρου $\mathbf{E_n^*}$ του πραγματικού διανυσματικού χώρου $\mathbf{E_n}$

Ορισμός 1.4.1.

Μια γραμμική απεικόνιση α του πραγματικού διανυσματικού χώρου E_n στον $\mathbb{R}$,

$$\alpha: E_n \quad \mathbb{R}$$

λέγεται **γραμμική μορφή** του E_n.

Συμβολίζουμε $\mathbf{E_n^*}$ το σύνολο των γραμμικών μορφών του E_n, που με τις πράξεις

$$(1.4.1) \qquad \begin{matrix} (\alpha_1 + \alpha_2)(x\ ) = \alpha_1(x\ ) + \alpha_2(x\ ) \\ (\lambda\alpha)(x\ ) = \lambda\alpha(x\ ) \end{matrix} , \qquad \alpha, \alpha_1, \alpha_2 \quad E_n^*, \qquad \lambda \quad \mathbb{R}, \qquad x \quad E_n,$$

γίνεται πραγματικός διανυσματικός χώρος.

Ορισμός 1.4.2.

Ο πραγματικός διανυσματικός χώρος E_n^* των γραμμικών μορφών του E_n, λέγεται **δυϊκός χώρος** του E_n.

Συμφωνούμε για τα στοιχεία (διανύσματα) του χώρου E_n^* **να μην γράφεται** το βέλος (   ) πάνω από το γράμμα που τα παριστά.

Θεώρημα 1.4.1.

Ο διανυσματικός χώρος E_n^* έχει την ίδια διάσταση με τον χώρο E_n, δηλαδή

$$(1.4.2) \qquad \boxed{\dim E_n^* = \dim E_n = n.}$$

Απόδειξη

Αν $\{e_i\}_{i=1, 2,\dots, n}$ είναι μια βάση του χώρου E_n και $x \quad E_n$, τότε

(1.4.3) $$x = x^i e_i .$$

Η τιμή του x μέσω της γραμμικής μορφής α, είναι

$$\alpha(x) = \alpha(x^i e_i),$$

ή ακόμη, λόγω της σχέσης (1.3.1) που ικανοποιεί η απεικόνιση α,

(1.4.4) $$\alpha(x) = x^i \alpha(e_i).$$

Συμβολίζουμε, τους n πραγματικούς αριθμούς,

(1.4.5) $$\alpha_i = \alpha(e_i) , \quad i=1, 2,\dots, n$$

και ορίζουμε n απεικονίσεις $\{e^i\}_{i=1, 2 ,\dots, n}$ του E_n στον $\mathbb{R}$,

$$e^i : E_n \quad \mathbb{R},$$

με τη σχέση

(1.4.6) $$e^i (x) = x^i, \qquad x \quad E_n .$$

Είναι φανερό, ότι οι απεικονίσεις e^i που ορίστηκαν με την παραπάνω σχέση, ικανοποιούν την ιδιότητα γραμμικότητας (1.3.1), δηλαδή είναι γραμμικές μορφές του E_n. Αρα, είναι στοιχεία του χώρου E_n^* και μάλιστα γραμμικά ανεξάρτητα. Πραγματικά, ο γραμμικός συνδυασμός τους,

(1.4.7) $$\lambda_1 e^i =0, \quad \lambda_i \quad \mathbb{R}, \quad i=1, 2,\dots, n,$$

δίνει $\quad x \quad E_n$,

$$\lambda_i e^i (x) =0$$

δηλαδή,

$$\lambda_i x^i = 0.$$

Αν $x = e_j$ τότε $x^i = \delta^i_j$ και η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\lambda_i \delta^i_j = 0,$$

ή ακόμη

$$\lambda^j = 0, \qquad j=1, 2,\dots, n.$$

Άρα, όλοι οι συντελεστές στη σχέση (1.4.7) είναι μηδέν. Εξάλλου, με τη βοήθεια των σχέσεων (1.4.5) και (1.4.6) η τιμή $\alpha(x)$ (σχ. (1.4.4)) γράφεται

$$\alpha(x) = \alpha_i e^i(x), \quad x \in E_n,$$

ή ακόμη

(1.4.8) $$\alpha=\alpha_i e^i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Δηλαδή, κάθε διάνυσμα $\alpha \in E_n^*$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\{e^i\}_{i=1, 2,\dots, n}$ του E_n^*. Συνεπώς, τα n διανύσματα

(1.4.9) $$\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$$

ορίζουν μια **βάση** για τον πραγματικό διανυσματικό χώρο E_n^*.

Ορισμός 1.4.3.

Η βάση $\{e^i\}_{i=1, 2,\dots, n}$ του χώρου E_n^* που ορίζεται από τη σχέση (1.4.6) ή ισοδύναμα από τη σχέση,

(1.4.10) $$e^i(e_j) = \delta^i_j,$$

λέγεται **δυϊκή βάση** της βάσης $\{e_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ του χώρου E_n.
Οι n πραγματικοί αριθμοί

(1.4.11) $$\{\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n\} \text{ ή } \{\alpha_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$$

που ορίστηκαν απ' τη σχέση (1.4.5) σαν τιμές του α για τα διανύσματα $\{e_1, e_2,\dots, e_n\}$ αντίστοιχα, είναι οι **συνιστώσες** του α, όπως φαίνεται απ' τη σχέση (1.4.8).

Ορισμός 1.4.4.

Κάθε διάνυσμα α του πραγματικού διανυσματικού χώρου E_n^* λέγεται **συναλλοίωτο διάνυσμα** ή **συναλλοίωτος τανυστής πρώτης τάξης του E_n ή τανυστής τύπου $\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$ του E_n.**

Όπως και στην περίπτωση των διανυσμάτων του χώρου E_n, η έκφραση "συναλλοίωτος" προκύπτει από τον τρόπο μετασχηματισμού των συνιστωσών του α σε μια αλλαγή βάσης.

Είναι

(1.4.12) $$\{e^1, e^2, \dots, e^n\} \text{ ή } \{e^i\}_{i=1, 2, \dots, n}$$

η βάση του E_n^*, δυϊκή της βάσης (1.1.6) του χώρου E_n.

Σ' αυτή τη βάση, η γραμμική μορφή α, γράφεται

(1.4.13) $$\alpha = \alpha_j\, e^j$$

όπου

(1.4.14) $$\{\alpha_1\,, \alpha_2\,, \ldots, \alpha_n\,\} \quad \acute{\eta} \quad \{\alpha_j\,\}_{j=1,\,2,\,\ldots,\,n},$$

είναι οι νέες συνιστώσες της που ορίζονται απ' τη σχέση,

(1.4.15) $$\alpha_j \, = \alpha\,(e_j\,).$$

Στην παραπάνω σχέση, χρησιμοποιώντας διαδοχικά, τη σχέση (1.1.10) και τη γραμμικότητα της α προκύπτει,

$$\alpha_j \, = \alpha(A_j^i\, e_i) = A_j^i\, \alpha(e_i).$$

Δηλαδή, λόγω του ορισμού (1.4.5),

(1.4.16) $$\alpha_j \, = A_j^i \alpha_i, \quad j=1, 2, \ldots, n\,.$$

Συνεπώς οι συνιστώσες $\{\alpha_j\,\}$ και $\{\alpha_i\}$ μετασχηματίζονται με τη βοήθεια τού πίνακα A, όπως δηλαδή και οι βάσεις $\{e_j\,\}$ και $\{e_i\}$ (σχ. (1.1.10)). Γι' αυτό το λόγο οι συνιστώσες του διανύσματος α του E_n^* λέγονται **συναλλοίωτοι** σε μια αλλαγή βάσης του χώρου E_n.

Ακριβώς ανάλογα, προκύπτει ότι,

(1.4.17) $$\alpha_i = A_i^j\, \alpha_j\,, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Θεώρημα 1.4.1.

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε οι n ποσότητες $\{\alpha_i\}$ που αντιστοιχούν στη βάση $\{e^i\}$ του χώρου E_n^* να είναι συνιστώσες ενός ορισμένου συναλλοίωτου διανύσματος είναι σε κάθε αλλαγή βάσης να μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις (1.4.16) και (1.4.17).

Απόδειξη

Δείχτηκε, ήδη, ότι αν α είναι ένα ορισμένο συναναλλοίωτο διάνυσμα, τότε για τις συνιστώσες ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις. Αντίστροφα, έστω ότι

(1.4.18) $$\alpha{=}\alpha_i e^i \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha = \alpha_j\, e^j\,.$$

Δηλαδή x E_n,

$$\alpha(x\,) = \alpha_i e^i\,(x\,) \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha\ (x\,) = \alpha_j\, e^j\,(x\,)\,.$$

Εξ ορισμού,

$$e^i(x) = x^i \quad \text{και} \quad e^j(x) = x^j .$$

Αλλά, η δεύτερη σχέση με τη βοήθεια της σχέσης (1.1.13) δίνει,

$$e^j(x) = A^j_i \, x^i,$$

δηλαδή

$$e^j(x) = A^j_i \, e^i(x), \qquad x \quad E_n.$$

Άρα, οι βάσεις $\{e^j\}$ και $\{e^i\}$ του χώρου E^*_n, μετασχηματίζονται με τη σχέση

(1.4.19) $$e^j = A^j_i e^i, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Όμοια προκύπτει ότι

(1.4.20) $$e^i = A^i_j e^j, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Εξάλλου, με τη βοήθεια της (1.4.19), η β σχέση της (1.4.18) γράφεται

$$\alpha = \alpha_j \, A^j_i e^i$$

ή ακόμη, λόγω της (1.4.16),

$$\alpha = \alpha_i e^i.$$

Δηλαδή

$$\alpha = \alpha.$$

Παρατήρηση 1.4.1. Ανάλογα με την παρατήρηση (1.1.3), αν συμβολίσουμε

$$Q = (\alpha_i), \; i=1, 2, \ldots, n \quad \text{και} \quad Q = (\alpha_j), \; j=1, 2, \ldots, n$$

τους πίνακες τύπου 1 n με στοιχεία τις συνιστώσες (1.4.11) και (1.4.14) αντίστοιχα, του διανύσματος α E^*_n, τότε οι σχέσεις (1.4.16) και (1.4.17), με τη βοήθεια πινάκων, γράφονται σύντομα

$$Q = QA \quad \text{και} \quad Q = Q\,A^{-1},$$

ή αναλυτικά

$$[\alpha_1 \;\; \alpha_2 \; \ldots \; \alpha_n] = [\alpha_1 \; \alpha_2 \; \ldots \; \alpha_n] \begin{matrix} A^1_1 & A^1_2 \ldots A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 \ldots A^2_n \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ A^n_1 & A^n_2 \ldots A^n_n \end{matrix}$$

και

$$[\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n] = [\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n\ ] \begin{array}{ccc} A^1_1 & A^1_2 \dots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 \dots & A^2_n \\ \dots & \dots & \dots \\ A^n_1 & A^n_2 \dots & A^n_n \end{array} .$$

1.5. Ασκήσεις

1.5.1. Έστω E_2 πραγματικός διανυσματικός χώρος δύο διαστάσεων και x διάνυσμα του E_2 με συνιστώσες $\{x^i\}_{i=1,2}$ σε μια βάση $\{e_i\}_{i=1,2}$.

α) Να εξεταστεί αν οι απεικονίσεις α: $E_2 \quad \mathbb{R}$ που ορίζονται απ' τις σχέσεις

$\alpha(x) = x^1+x^2, \quad \alpha(x) = 1, \quad \alpha(x) = \dfrac{x^2}{\varkappa}, \quad \varkappa \quad \mathbb{R}, \quad \varkappa\pi 0$

είναι γραμμικές μορφές του E_2.

β) Αν, ναι, ποιές είναι οι συνιστώσες της σ' αυτή τη βάση.

1.5.2. Αν M_n είναι ο πραγματικός διανυσματικός χώρος των n n πινάκων $A=(\alpha_{ij})$, να δειχθεί ότι η απεικόνιση ω: $M_n \quad \mathbb{R}$ που ορίζεται απ' τη σχέση $\omega(A) = \alpha_{11}+\alpha_{22}+\dots+\alpha_{nn} = t_r(A)$ είναι στοιχείο του χώρου M^*_n.

1.6. Συμβολισμοί του χώρου E^{**}_n

Θεωρούμε τον n διάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο E_n και τον δυϊκό του E^*_n. Ακριβώς ανάλογα μπορεί να οριστεί ο δυϊκός χώρος του E^*_n. Συμβολίζεται

$$\mathbf{E^{**}_n} = (E^*_n)^*$$

και είναι ο χώρος των γραμμικών μορφών b του E^*_n,

$$b: E^*_n \quad \mathbb{R},$$

που ικανοποιεί τη σχέση γραμμικότητας:

$$b(\lambda^1\alpha_1+\lambda^2\alpha_2) = \lambda^1 b(\alpha_1)+\lambda^2 b(\alpha_2), \qquad \alpha_i \quad E^*_n, \quad \lambda^i \quad \mathbb{R},\ i=1, 2.$$

Έστω $\{e_i\}_{i=1,2,\dots n}$ μια βάση του E_n και $\{e^i\}_{i=1,2,\dots,n}$ η δυϊκή της. Τότε οι n γραμμικές μορφές $\{e_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ του E^*_n που ορίζονται απ' τις σχέσεις, (1.6.1) $$e_i(\alpha) = \alpha_i \qquad \alpha \quad E_n^*,\ i=1, 2,\ldots, n,$$

ή ισοδύναμα απ’ τις σχέσεις,

(1.6.2) $$e_i(e^j) = \delta_i^j,$$

αποτελούν τη **βάση**

(1.6.3) $$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

του χώρου E_n^{**}

Συνεπώς,

$$\dim E_n^{**} = \dim E_n^* = n.$$

Εξάλλου, κάθε στοιχείο b του χώρου E_n^{**} γράφεται,

(1.6.4) $$b=b^i e_i$$

και οι συνιστώσες του $\{b^i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ δίνονται απ’ τις σχέσεις,

$$b^i = b(e^i), \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Αν, ήδη, $\{e_j\}_{j=1,\ 2,\ \ldots,\ n}$ είναι μια νέα βάση του E_n που ικανοποιεί τις σχέσεις (1.1.10) και (1.1.11), τότε η νέα βάση $\{e_j\}$ του E_n^{**} που προκύπτει με την διπλή δυικότητα, συνδέεται με την αρχική $\{e_i\}$ με τους τύπους,

(1.6.5) $$\begin{aligned} e_j &= A_j^i\, e_i, \\ e_i &= A_i^j\, e_j\,. \end{aligned}$$

Σ’ αυτή τη βάση το στοιχείο b του E_n^{**} γράφεται

(1.6.6) $$b = b^j e_j$$

και οι νέες συνιστώσες

$$b^j = b(e^j)$$

συνδέονται με τις αρχικές συνιστώσες $\{b^i\}$ με τις σχέσεις,

(1.6.7) $$\begin{aligned} b^j &= A_i^j b^i, \\ b^i &= A_j^i b^j. \end{aligned}$$

Όμως, σύμφωνα με το θεώρημα (1.1.1), οι παραπάνω τύποι δίνουν ότι $\{b^i\}$, $\{b^j\}$ είναι οι συνιστώσες ενός ορισμένου αντιαλλοίωτου διανύσματος

x του χώρου E_n, δηλαδή

(1.6.8) $$x = b^i e_i = b^j e_j .$$

Θεώρημα 1.6.1.

Οι n- διάστατοι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι E_n και E_n^{**} είναι φυσικά ισόμορφοι χώροι.

Απόδειξη

Οι χώροι E_n και E_n^{**} είναι της ίδιας διάστασης n και συνεπώς είναι ισόμορφοι. Η απεικόνιση που στο στοιχείο x (σχ. (1.6.8)) του χώρου E_n αντιστοιχεί το στοιχείο b (σχ. (1.6.4) και (1.6.6)) του χώρου E_n^{**} είναι ισομορφία και μάλιστα φυσική, δηλαδή, ανεξάρτητη της οποιασδήποτε εκλογής βάσης. Συνεπώς τα στοιχεία x και b μπορούν να ταυτοποιηθούν.

Παρατήρηση 1.6.1. Εφόσον οι χώροι E_n και E_n^{**} ταυτοποιούνται έπεται ότι κάθε αντιαλλοίωτο διάνυσμα x μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι γραμμική μορφή του E_n^*,

$$x : E_n^* \quad \mathbb{R}.$$

Όμοια

$$e_i = e_i .$$

Συνεπώς η σχέση (1.6.2) γράφεται ακόμη,

$$e_i \, (e^j) = \delta_i^j,$$

δηλαδή η σχέση (1.4.10) που συνδέει τις δυϊκές βάσεις $\{e_i\}$ και $\{e^j\}$ είναι αντιστρέψιμη.

1.7. Συμβολισμοί διγραμμικών μορφών πραγματικών διανυσματικών χώρων

Ορισμός 1.7.1.

Αν E_n και F_m είναι δύο πραγματικοί διανυσματικοί χώροι με διάσταση n και m αντίστοιχα, μια **διγραμμική μορφή** T του $E_n^* \quad F_m^*$ είναι μια απεικόνιση