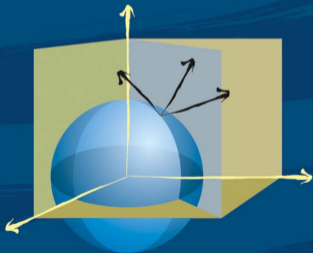


Αθανάσιος Δερμάνης

# ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

## Πρόλογος

Οι σημερινές τεχνικές δυνατότητες, για γρήγορους και εκτεταμένους υπολογισμούς, έδωσαν τεράστια ώθηση στις εφαρμοσμένες επιστήμες, παρά τις όποιες ενστάσεις για την ενδεχόμενη κατάχρησή τους. Σε κάθε υπολογισμό, τόσο τα εισαγόμενα, όσο και τα εξαγόμενα στοιχεία, είναι αριθμοί, οι οποίοι αντιπροσωπεύουν στοιχεία της φυσικής πραγματικότητας, με τη βοήθεια συγκεκριμένων φυσικών και μαθηματικών μοντέλων. Επομένως, για να υπάρξουν εφαρμοσμένες επιστήμες (τουλάχιστον στις περιοχές των θετικών επιστημών και της μηχανικής, αλλά και στις ανθρωπιστικές επιστήμες μέχρι ένα βαθμό) είναι ανάγκη να «αριθμοποιήσουμε», να παραστήσουμε δηλαδή με αριθμούς, στοιχεία των μοντέλων που περιγράφουν φυσικά φαινόμενα. Πρώτα απ' όλα, τα σημεία του χώρου, όπου συμβαίνουν τα φαινόμενα αυτά, πρέπει να παρασταθούν από αριθμούς, που ονομάζουμε «συντεταγμένες». Φυσικά μεγέθη που εμφανίζονται σε σημεία του χώρου, τα οποία εκτός από μέγεθος έχουν επιπλέον διεύθυνση και φορά, τα διανυσματικά δηλαδή μεγέθη, πρέπει να παρασταθούν από αριθμούς, με τη βοήθεια ενός τοπικού «συστήματος αναφοράς», τριών δηλαδή διανυσμάτων, ο γραμμικός συνδυασμός των οποίων, με κατάλληλους συντελεστές, αναπαράγει το ζητούμενο διάνυσμα, το οποίο και παριστάνεται πλέον από τις τιμές των συντελεστών, που ονομάζουμε «συνιστώσες».

Στους Ευκλείδειους χώρους και στα πλαίσια της Νευτώνειας μηχανικής, αρκεί να εισάγουμε ένα μόνο σύστημα αναφοράς, το οποίο μπορούμε να μεταθέσουμε παράλληλα σε όποιο σημείο επιθυμούμε, με τη βοήθεια του οποίου προκύπτει και το πλέον εύχρηστο είδος συντεταγμένων, οι καρτεσιανές συντεταγμένες. Επομένως η μελέτη των διαφόρων ειδών συντεταγμένων και των συστημάτων αναφοράς είναι θεμελιώδης ανάγκη σε κάθε κλάδο των εφαρμοσμένων επιστημών.

Παράλληλα όμως, η έννοια του συστήματος αναφοράς μπορεί να γενικευθεί, αν εξετάσουμε το βασικό τρόπο λειτουργίας του: τη δημιουργία ενός μαθηματικού-φυσικού αντικειμένου με τη βοήθεια γραμμικών συνδυασμών ομοειδών αντικειμένων, με συντελεστές οι οποίοι και αντιπροσωπεύουν πλέον το αντικείμενο στους υπολογισμούς. Έτσι εκτός από τα συνηθισμένα διανύσματα του τρισδιάστατου χώρου, μπορούμε να μιλήσουμε για το σύστημα αναφοράς για τα διανύσματα σε χώρους με περισσότερες διαστάσεις, οι οποίοι εμφανίζονται στην επί-

λωση γραμμικών συστημάτων, η ακόμα και για συναρτήσεις, τις οποίες μπορούμε να δούμε σαν διανύσματα σε χώρους άπειρων διαστάσεων.

Αρχικός πυρήνας για τη συγγραφή του παρόντος βιβλίου, υπήρξαν οι διδακτικές σημειώσεις για τις ανάγκες ενός νέου μαθήματος με τίτλο «Συστήματα αναφοράς και χρόνου», του Τομέα Γεωδαισίας και Τοπογραφίας του Τμήματος Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Α.Π.Θ. Το αντικείμενο της εγκατάστασης παγκόσμιων συστημάτων αναφοράς έχει αποκτήσει τα τελευταία χρόνια τεράστιο ενδιαφέρον για τις γεωεπιστήμες και την αστρονομία. Η Διεθνής Γεωδαιτική Ένωση (IAG), ύστερα από την τελευταία αναμόρφωση της λειτουργικής δομής της, έχει αφιερώσει την πρώτη από τις τέσσερες «Επιτροπές» της στα συστήματα αναφοράς, ενώ από κοινού με τη Διεθνή Αστρονομική Ένωση (IAU) έχει δημιουργήσει μια ειδική υπηρεσία, την Διεθνή Υπηρεσία Περιτροφής της Γης και Συστημάτων Αναφοράς (IERS), που ασχολείται με την πρακτική υλοποίηση των συστημάτων αναφοράς.

Η ύλη που αναπτύσσεται εδώ, καλύπτει τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά ζητήματα. Στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο προτάξαμε μια κριτική παρουσίαση της ιστορικής ανάπτυξης των αντιλήψεων μας πάνω στο ζήτημα του προσδιορισμού της θέσης ως προς ένα σύστημα αναφοράς, το οποίο συνδέεται τόσο με το πρόβλημα του σχήματος της γης, όσο και με τη μορφή του πεδίου βαρύτητας.

Το 2<sup>ο</sup> και 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο περιέχουν τις απαραίτητες, για πρωτοετείς φοιτητές, έννοιες από τα μαθηματικά και τη γεωμετρία και με την ευκαιρία ξεκαθαρίζουν ορισμένες διαδεδομένες παρανοήσεις, που πηγάζουν από την αποκλειστική χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων, οι οποίες, ενώ διευκολύνουν κατά πολύ τους υπολογισμούς, δεν μας επιτρέπουν να δούμε καθαρά τις λεπτές διαφορές ανάμεσα σε θεμελιώδεις έννοιες.

Το 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο εξετάζει από θεωρητική σκοπιά το πρόβλημα των συστημάτων αναφοράς σε κίνηση, προετοιμάζοντας το έδαφος για την πρακτική εφαρμογή στην περίπτωση της περιστροφής της γης στο 7<sup>ο</sup> κεφάλαιο.

Επειδή, πέρα από τις σύγχρονες πρακτικές και τεχνολογικές κατακτήσεις, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε και τις μεθόδους του παρελθόντος, το μεγαλύτερο μέρος του 5<sup>ου</sup> κεφαλαίου είναι αφιερωμένο στη σύντομη παρουσίαση συστημάτων αναφοράς, που σχετίζονται με το πεδίο βαρύτητας της γης. Πέρα όμως από τις, ιστορικού μόνο πλέον ενδιαφέροντος, μεθοδολογίες που στηρίζονται στο τοπικό αστρονομικό σύστημα (κεφ. 5.5 έως 5.8), το ζήτημα των συστημάτων υψών (κεφ. 5.9) παραμένει πάντα επίκαιρο, δεδομένου ότι τα ύψη με πρακτικό ενδιαφέρον, για τις εφαρμογές, είναι τα «φυσικά» ύψη, που σχετίζονται με το πεδίο βαρύτητας της γης, και όχι τα γεωμετρικά ύψη, που σχετίζονται μόνο με

το χρησιμοποιούμενο σύστημα αναφοράς.

Το 6<sup>ο</sup> κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στη σχέση ανάμεσα σε ένα παγκόσμιο σύστημα, όπου η θέση ορίζεται από το γεωγραφικό μήκος και πλάτος πάνω σε ένα ελλειψοειδές μοντέλο της γης, και τις χαρτογραφικές συντεταγμένες, που χρησιμοποιούνται περισσότερο για την απόδοση της θέσης σε τοπικό-περιφερειακό ή εθνικό επίπεδο.

Στο 7<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζεται συστηματικά ο νέος τρόπος περιγραφής της περιστροφής της γης, σύμφωνα με σχετικές αποφάσεις της Διεθνούς Αστρονομικής Ένωσης και εξηγούνται οι βασικές αρχές στις οποίες αυτές στηρίζονται. Παράλληλα γίνεται μια σύντομη περιγραφή των διαφορικών εξισώσεων της περιστροφής και των επίγειων συστημάτων αναφοράς για την παραμορφώσιμη γη.

Το 8<sup>ο</sup> κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην «τέταρτη διάσταση» της φυσικής πραγματικότητας το χρόνο. Οι διάφοροι ορισμοί του χρόνου, ξεκινώντας από τη χρήση της περιστρεφόμενης γης ως χρονομέτρου, μέχρι τα σύγχρονα εξαιρετικής ακρίβειας ατομικά ρολόγια, εξετάζονται τόσο θεωρητικά, όσο και από τη σκοπιά της πρακτικής υλοποίησης. Με την αξιοποίηση μετρήσεων πολύ μεγάλης ακρίβειας δεν μπορούν πλέον να αγνοηθούν οι προβλέψεις της θεωρίας της σχετικότητας. Γι' αυτό, εξετάζουμε σύντομα τη σχέση ανάμεσα στον κοινό Νευτώνειο χρόνο και το χρόνο, ως μια από τις τέσσερες συντεταγμένες του αδιαχώριστου χωροχρόνου της θεωρίας της σχετικότητας.

Στο 9<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συστήματα αναφοράς, που χρησιμοποιούνται στην αστρονομία, με μια συστηματική σύγκριση ανάμεσα στην κλασική περιγραφή της περιστροφής της γης, και τη νέα περιγραφή, που αποφασίστηκε από την Διεθνή Αστρονομική Ένωση το 2000 και τέθηκε σε ισχύ από την 1<sup>η</sup> Ιανουαρίου 2003.

Το 10<sup>ο</sup> κεφάλαιο περιγράφει αναλυτικά την υλοποίηση, από την IERS, των νέων συμβάσεων σχετικά με τα συστήματα αναφοράς και τα προγράμματα υπολογιστή που είναι διαθέσιμα για τους μετασχηματισμούς από το «Διεθνές Ουράνιο» στο «Διεθνές Επίγειο» σύστημα αναφοράς.

Στο 11<sup>ο</sup> κεφάλαιο εξετάζονται τα συστήματα αναφοράς που σχετίζονται με τις δορυφορικές τροχιές και ιδιαίτερα εκείνα που εμφανίζονται στην ανάλυση των παρατηρήσεων του Παγκόσμιου Συστήματος Προσδιορισμού Θέσης (GPS).

Τα τελευταία 4 κεφάλαια, τα οποία είναι αφιερωμένα σε γενικεύσεις της συνηθισμένης έννοιας του συστήματος αναφοράς, έχουν περισσότερο μαθηματικό χαρακτήρα, αλλά επικεντρώνονται σε αποτελέσματα με ενδιαφέρον στις εφαρμογές. Το 12<sup>ο</sup> κεφάλαιο εξετάζει το πρόβλημα της λύσης ενός συστήματος

γραμμικών εξισώσεων και την απλοποίηση της με τη χρησιμοποίηση περισσότερο αποτελεσματικών συστημάτων αναφοράς, τόσο για τις άγνωστες παραμέτρους όσο και για τις παρατηρήσεις που δίνουν τους σταθερούς όρους του συστήματος.

Το 13<sup>ο</sup> κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στο πρόβλημα του συστήματος αναφοράς για την παράσταση συναρτήσεων, ή στις «συναρτήσεις βάσης» όπως έχει καθιερωθεί να λέγονται. Ξεκινώντας από απλά πολώνυμα, εξετάζονται οι συναρτήσεις σε ένα διάστημα, οι οποίες μπορούν να αναπτυχθούν σε σειρά Fourier, καθώς και η αντίστοιχη περίπτωση συναρτήσεων που ορίζονται στην επιφάνεια μιας σφαίρας, των οποίων τα αναπτύγματα σε σειρά σφαιρικών αρμονικών έχουν ιδιαίτερη σημασία για τις γεωεπιστήμες.

Ο κύριος ρόλος των διαφόρων ειδών μη καρτεσιανών (καμπυλόγραμμων) συντεταγμένων είναι η ανάλυση φυσικών προβλημάτων, τα οποία μοντελοποιούνται μέσα από διαφορικές εξισώσεις. Για το λόγο αυτό, το τελευταίο 15<sup>ο</sup> κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στον διαφορικό και διανυσματικό λογισμό, όταν χρησιμοποιούνται διάφορα κατάλληλα, κατά περίπτωση, συστήματα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων. Έγινε ιδιαίτερη προσπάθεια να αναδειχθούν τα σημαντικά σημεία της σχετικής ύλης, τα οποία «εξαφανίζονται» κάτω από τις απλοποιήσεις που προκύπτουν από τη χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων.

Όμως μια «ακριβής» (αν και όχι μαθηματικά αυστηρή) έκθεση των σχετικών εννοιών, χωρίς ασάφειες και σκοτεινά σημεία, απαιτεί κάποια βασικά στοιχεία από τον τανυστικό λογισμό, τα οποία και προτάξαμε στο 14<sup>ο</sup> κεφάλαιο.

Κύριος στόχος του παρόντος συγγράμματος δεν είναι η κάλυψη των εκπαιδευτικών αναγκών ενός συγκεκριμένου μαθήματος, αλλά η δημιουργία ενός βασικού κειμένου αναφοράς, που ελπίζω ότι θα φανεί χρήσιμο σε όσους αγαπούν τη γνώση και έχουν τη διάθεση να της αφιερώσουν την απαραίτητη μελέτη.

Ευχαριστώ όσους βοήθησαν στη δημιουργία του βιβλίου αυτού, με οποιοδήποτε τρόπο, και ιδιαίτερα τον συνάδελφο Καθηγητή Ηλία Τζιαβό, για την ουσιαστική συνδρομή του στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο.

Η μακρόχρονη συνεργασία μου με τις Εκδόσεις Ζήτη, υπήρξε πάντοτε απόλυτα θετική. Η στενή συνεργασία με τον κ. Νίκο Ζήτη κατά την προετοιμασία του βιβλίου αυτού, σε όλες του τις λεπτομέρειες, υπήρξε για μένα ιδιαίτερα ικανοποιητική και γι' αυτό τον ευχαριστώ θερμά.

# Περιεχόμενα

1.	Εισαγωγή	
1.1	Ο χώρος και ο χρόνος στις φυσικές επιστήμες	1
1.2	Η μέτρηση του χρόνου	2
1.3	Μετρήσεις στο χώρο. Από την γεωμετρία στη γεωδαισία	5
1.4	Μετρήσεις στο χώρο. Σχήμα και θέση	7
1.5	Εξέλιξη των μαθηματικών μοντέλων για το σχήμα της γης και το πεδίο βαρύτητας	16
1.6	Η γεωδαισία στην διαστημική εποχή	30
2.	Βασικές Έννοιες	
2.1	Γεωμετρικές και αναλυτικές μέθοδοι στα μαθηματικά	37
2.2	Συστήματα συντεταγμένων και τοπικά διανυσματικά συστήματα αναφοράς	39
	Αναλυτική περιγραφή των σημείων του χώρου	39
	Αναλυτική περιγραφή των τοπικών διανυσμάτων	41
	Αναλυτική περιγραφή των διανυσματικών πεδίων	42
	Αναλυτική περιγραφή των τανυστών	43
2.3	Συστήματα συντεταγμένων και αναφοράς στον ευκλείδειο χώρο	44
	Ευκλείδειος χώρος και παράλληλη μετάθεση	44
	Άθροιση διανυσμάτων	45
	Σύστημα αναφοράς στον ευκλείδειο χώρο	46
	Διάνυσμα θέσης και καρτεσιανές συντεταγμένες	46
	Απευθείας ορισμός των καρτεσιανών συντεταγμένων χωρίς το σύστημα αναφοράς	47
	Διαφορά συστήματος αναφοράς και συστήματος συντεταγμένων	48
	Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	50
	Διαφορά φυσικού και μαθηματικού Ευκλείδειου χώρου	51
	Ορθοκανονικές βάσεις	52
	Μη ορθοκανονικές βάσεις	53
	Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	54
	Ιδιότητες εξωτερικού γινομένου	55
	Συνιστώσες του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων	56

Αξονικό διάνυσμα αντισυμμετρικού πίνακα (αντισυμμετρικής απεικόνισης) .....	57
Ιδιότητες αντισυμμετρικών πινάκων .....	58
Φυσική σημασία της ορίζουσας πίνακα διαστάσεων $3 \times 3$ .....	58
2.4 Σχέσεις μεταξύ δύο διαφορετικών συστημάτων αναφοράς.....	59
Προσανατολισμός βάσης.....	62
2.5 Περιγραφή του πίνακα στροφής. Στροφές γύρω από τους άξονες.....	64
Ανάλυση στροφής σε 3 στροφές γύρω από τους άξονες .....	64
Στροφή στο επίπεδο .....	64
Στοιχειώδεις στροφές γύρω από τους 3 άξονες.....	65
Δυνατότητες επιλογής στοιχειωδών στροφών. Γωνίες Cardan και Euler.....	67
Ιδιότητες των στοιχειωδών πινάκων στροφής.....	69
Παράγωγοι στοιχειωδών πινάκων στροφής.....	69
2.6 Γεωμετρική σημασία των γωνιών στροφής γύρω από τους άξονες.....	70
2.7 Μιγαδικοί αριθμοί και στροφή στο επίπεδο.....	73
3. Συστήματα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων	
3.1 Γενικά χαρακτηριστικά.....	75
3.2 Σφαιρικές συντεταγμένες.....	82
3.3 Κυλινδρικές συντεταγμένες.....	88
3.4 Γεωδαιτικές συντεταγμένες .....	90
3.5 Ελλειψοειδείς συντεταγμένες .....	94
3.6 Ολοκληρώματα ως προς καμπυλόγραμμες συντεταγμένες.....	96
<i>Παράρτημα 3Α: Σχέση μεταξύ καρτεσιανών και γεωδαιτικών συντεταγμένων</i> .....	103
4. Συστήματα αναφοράς σε κίνηση	
4.1 Αδρανειακά και επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς.....	107
4.2 Ψευδοδυνάμεις σε ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς.....	110
4.3 Η περιστροφική κίνηση ενός στερεού σώματος .....	113
4.4 Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας περιστροφής .....	117
4.5 Οι κινηματικές εξισώσεις του Euler .....	120
4.6 Συστήματα αναφοράς για παραμορφώσιμα σώματα .....	125

5.	Το πεδίο βαρύτητας της γης	
5.1	Δύναμη έλξης και δυναμικό έλξης .....	131
5.2	Φυγόκεντρη δύναμη και βαρύτητα .....	136
5.3	Γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πεδίου βαρύτητας .....	138
5.4	Προσδιορισμός του πεδίου βαρύτητας .....	144
5.5	Το τοπικό αστρονομικό σύστημα αναφοράς .....	156
5.6	Το τοπικό γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς.....	160
5.7	Αναγωγή από τον άξονα περιστροφής στο επίγειο σύστημα αναφοράς.....	162
5.8	Μετασχηματισμοί από το τοπικό αστρονομικό στο τοπικό γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς.....	164
5.9	Συστήματα υψών.....	170
6.	Γεωδαιτικό datum και δίκτυα	
6.1	Γεωδαιτικές συντεταγμένες και γεωδαιτικό datum .....	181
6.2	Χαρτογραφικές προβολές.....	186
6.3	Το πρόβλημα της αλλαγής κλίμακας .....	190
6.4	Ο προσδιορισμός των παραμέτρων μετασχηματισμού μεταξύ δύο συστημάτων αναφοράς για το ίδιο δίκτυο.....	193
6.5	Το διαχρονικό σύστημα αναφοράς για δίκτυα σημείων.....	199
	Δίκτυα διακριτά ως προς το χρόνο .....	203
	Δίκτυα συνεχή ως προς το χρόνο .....	206
7.	Συστήματα αναφοράς για την περιστρεφόμενη γη	
7.1	Μετάπτωση - κλόνηση, ημερήσια περιστροφή και κίνηση του πόλου.....	215
7.2	Συστήματα αναφοράς με τον τρίτο άξονα στην κατεύθυνση του διανύσματος περιστροφής.....	218
7.3	Η περιστροφή της γης .....	225
	<i>Παράρτημα 7Α: Προσδιορισμός της μη περιστρεφόμενης αρχής (NRO) .....</i>	<i>230</i>
8.	Συστήματα χρόνου	
8.1	Νευτώνειος και σχετικιστικός χρόνος.....	233
8.2	Αστρικός και παγκόσμιος χρόνος.....	235



8.3	Δυναμικός χρόνος .....	243
8.4	Ατομικός χρόνος .....	244
8.5	Ο ρόλος της θεωρίας της σχετικότητας.....	246
9.	Συστήματα αναφοράς για την περιγραφή διευθύνσεων στην αστρονομία	
9.1	Οριζόντιο σύστημα, σύστημα ωριαίας γωνίας, σύστημα ορθής αναφοράς και εκλειπτικό σύστημα .....	253
	Το οριζόντιο σύστημα .....	255
	Το σύστημα της ωριαίας γωνίας .....	257
	Το σύστημα της ορθής αναφοράς .....	257
	Το εκλειπτικό σύστημα .....	259
9.2	Σχέσεις μετατροπής μεταξύ των αστρονομικών συστημάτων .....	259
9.3	Κλασική περιγραφή της περιστροφής της γης στην αστρονομία.....	262
9.4	Αστρογεωδαιτικές μέθοδοι προσδιορισμού του αστρονομικού μήκους και πλάτους .....	267
	<i>Παράρτημα 9A: Σφαιρική τριγωνομετρία .....</i>	<i>271</i>
10.	Η υλοποίηση των συστημάτων αναφοράς από την IERS	
10.1	Ορισμός και υλοποίηση των συστημάτων αναφοράς από την IERS.....	275
10.2	Υπολογισμός της μετάπτωσης και κρόνισης.....	278
10.3	Υπολογισμός της κίνησης του πόλου.....	284
10.4	Υπολογισμός της ημερήσιας περιστροφής .....	287
10.5	Υπολογισμοί για την κλασική αστρονομική περιγραφή .....	287
10.6	Υπορουτίνες για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού από το ουράνιο στο επίγειο σύστημα .....	289
11.	Συστήματα αναφοράς στη γεωδαισία δορυφόρων	
11.1	Οι νόμοι του Kepler .....	297
11.2	Η κίνηση στο επίπεδο της τροχιάς .....	299
11.3	Η έλλειψη του Kepler στο χώρο .....	302
11.4	Περιγραφή των τροχιών των δορυφόρων στο παγκόσμιο σύστημα θέσης GPS .....	307
	<i>Παράρτημα 11A: Το Παγκόσμιο Γεωδαιτικό Σύστημα WGS 84 .....</i>	<i>312</i>

12. Συστήματα αναφοράς και γραμμικές εξισώσεις	
12.1 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων .....	315
12.2 Γεωμετρικός προσδιορισμός των λύσεων ελαχίστων τετραγώνων και ελάχιστης νόρμας .....	319
12.3 Μεταβολή του συστήματος αναφοράς στο χώρο των αγνώστων και των παρατηρήσεων .....	325
12.4 Ανάλυση μοναδικών τιμών .....	327
12.5 Ο ρόλος του συστήματος αναφοράς του Ευκλείδειου χώρου στις γραμμικές εξισώσεις της ανάλυσης δικτύων ελέγχου .....	334
13. Συστήματα αναφοράς σε χώρους συναρτήσεων	
13.1 Μη ορθογώνιες βάσεις στον Ευκλείδειο χώρο .....	344
13.2 Χώροι πολυωνυμικών συναρτήσεων .....	347
13.3 Βέλτιστη προσέγγιση συνάρτησης με πολυώνυμο .....	357
13.4 Ανάπτυγμα συνάρτησης σε σειρά Fourier .....	359
13.5 Σφαιρικές αρμονικές .....	364
14. Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες και τανυστικός λογισμός	
14.1 Διανύσματα και γραμμικές μορφές .....	375
14.2 Τανυστές .....	382
Διγραμμικές μορφές .....	385
14.3 Το εσωτερικό γινόμενο και ο μετρικός τανυστής .....	385
Φυσική αντιστοιχία μεταξύ διανυσμάτων και γραμμικών μορφών (μετρικός δυϊσμός) .....	386
Άλλες απεικονίσεις οι οποίες παριστάνονται από τανυστές .....	388
Αναβιβασμός και καταβιβασμός δεικτών ενός τανυστή .....	390
14.4 Συστολή .....	393
14.5 Μεταβολή των συνιστωσών τανυστών .....	395
14.6 Συμμετρικοί και αντισυμμετρικοί τανυστές .....	397
14.7 Το μικτό γινόμενο διανυσμάτων και ο τανυστής όγκου .....	398
14.8 Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων .....	401
14.9 Αντιστοιχία διανυσμάτων και διγραμμικών αντισυμμετρικών μορφών (δυϊσμός όγκου) .....	402

15. Διαφορικός λογισμός και διανυσματική ανάλυση με καμπυλόγραμμες συντεταγμένες	
15.1 Τανυστικά πεδία και διαφορικός λογισμός στον Ευκλείδειο χώρο .....	405
15.2 Παράγωγος διανύσματος κατά μήκος καμπύλης γραμμής.....	407
Η μαθηματική έννοια της καμπύλης.....	407
Παράγωγος διανύσματος κατά μήκος καμπύλης.....	409
Εφαπτόμενο διάνυσμα σε μία καμπύλη .....	410
Τα σύμβολα Christoffel του δευτέρου είδους.....	412
Οι συνιστώσες της παραγώγου διανύσματος κατά μήκος καμπύλης .....	415
Παράγωγος βαθμωτού πεδίου ως προς διάνυσμα .....	417
Καμπύλη ολοκλήρωσης διανυσματικού πεδίου .....	420
Η κλίση ενός βαθμωτού πεδίου .....	421
Το στοιχείο μήκους και το μήκος τμήματος καμπύλης.....	423
15.3 Παραγωγή κατά μήκος καμπύλης και ως προς διάνυσμα.....	425
Παράγωγος γραμμικής μορφής κατά μήκος καμπύλης .....	425
Παράγωγος τανυστή κατά μήκος καμπύλης .....	427
Παράγωγοι διανυσμάτων, γραμμικών μορφών και τανυστών ως προς διάνυσμα .....	429
15.4 Συμμεταβλητές παράγωγοι και σύνδεση.....	430
15.5 Διανυσματική ανάλυση .....	435
Δεύτερη συμμεταβλητή παράγωγος βαθμωτού πεδίου .....	435
Λαπλασιανή, απόκλιση και περιστροφή.....	437
15.6 Εφαρμογές σε ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες .....	441
Σφαιρικές συντεταγμένες .....	443
Κυλινδρικές συντεταγμένες .....	444
Γεωδαιτικές συντεταγμένες.....	445
Ελλειψοειδείς συντεταγμένες.....	447
Η Λαπλασιανή για ορθογώνιες συντεταγμένες .....	450
Η απόκλιση για ορθογώνιες συντεταγμένες.....	452
Η περιστροφή για ορθογώνιες συντεταγμένες .....	454

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Ο χώρος και ο χρόνος στις φυσικές επιστήμες

Τα φυσικά φαινόμενα, στα οποία συμπεριλαμβάνονται και οι καθημερινές μας εμπειρίες, λαμβάνουν χώρα μέσα σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, το πλαίσιο του «χώρου» και του «χρόνου». Η πρώτη αντίληψη της ανθρωπότητας, αλλά και κάθε ανθρώπινου όντος ξεχωριστά, για το χώρο ή το χρόνο είναι «τοπολογική»: Ο χώρος γίνεται αντιληπτός σαν «σχήμα» του συνόλου των αντικειμένων που μας περιβάλλουν, που καθορίζεται από τη σχετική τους θέση και μέγεθος, χωρίς σαφή αντίληψη των αποστάσεων («μετρική» αντίληψη). Ο χρόνος γίνεται αντιληπτός μέσα από τη βίωση του παρόντος, που τον τέμνει σε παρελθόν και μέλλον, και την συνακόλουθη διάταξη των γεγονότων σε χρονική σειρά με βάση το «πριν» και το «μετά».

Η μετρική αντίληψη, δηλαδή η αντίληψη για το μέγεθος του χώρου ή του χρόνου, έρχεται πρώτα για το χρόνο, καθώς η ζωή πάνω στη γη κυριαρχείται από ένα μεγάλο «ρολόι», τον ήλιο, που μας επιτρέπει να μετράμε το χρόνο χρησιμοποιώντας ως μονάδα τη διαδοχική εναλλαγή από φως και σκοτάδι, την ημέρα. Όμως η μονάδα αυτή είναι κατάλληλη μόνο για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα. Ακόμη και σήμερα στις γλώσσες των (μέχρι χθες τουλάχιστον) πρωτόγονων πληθυσμών, υπάρχουν λέξεις μόνο για ελάχιστους από τους πρώτους ακεραίους. Η σελήνη, με την διαδοχική εναλλαγή των φάσεών της, δίνει την επόμενη μονάδα, κατάλληλη για τη μέτρηση μεγαλύτερων χρονικών διαστημάτων: το σεληνιακό μήνα, το διάστημα δηλαδή ανάμεσα σε δύο πανσέληνους, με διάρκεια 29.5 ημερών. Τέλος η περιοδική εναλλαγή των εποχών δίνει το έτος, ως μονάδα για τη μέτρηση ακόμα μεγαλύτερων χρονικών διαστημάτων.

Η μετρική αντίληψη για το χώρο συγκεκριμενοποιείται καθώς ο άνθρωπος-κνηγός αναγκάζεται να καλύψει σχετικά μεγάλες αποστάσεις, αναζητώντας

την τροφή του. Όμως η μέτρηση των αποστάσεων δεν είναι άμεση, δεν προκύπτει δηλαδή από τη σύγκριση με μία μονάδα (αυτό θα συμβεί αργότερα), αλλά έμμεση, βασισμένη στη μέτρηση του χρόνου. Οι αποστάσεις μετρούνται με το χρόνο που χρειάζεται ο άνθρωπος για να τις διανύσει, π.χ. «μιας ημέρας δρόμος». Όμως έτσι υπεισέρχεται στη μέτρηση ένα υποκειμενικό στοιχείο, γιατί κάθε άνθρωπος, ή ομάδα ανθρώπων, δεν κινείται με την ίδια πάντα ταχύτητα. Αργότερα, τον δρομέα-άνθρωπο θα αντικαταστήσει το караβάνι με τις καμήλες στην ξηρά και στη θάλασσα το πλοίο, για τη μέτρηση των αποστάσεων από λιμάνι σε λιμάνι.

Η εξάρτηση αυτή, της μέτρησης του χώρου από το χρόνο, επιστρέφει στα πλαίσια της σύγχρονης τεχνολογίας. Σήμερα οι μετρήσεις αποστάσεων γίνονται σχεδόν αποκλειστικά μέσω του χρόνου που χρειάζεται για να τις διανύσει ένας ιδανικός δρομέας με σταθερή ταχύτητα: το φως. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι μία από τις σταθερές της σύγχρονης φυσικής.

Οι σύγχρονες φυσικές επιστήμες μελετούν τα φυσικά φαινόμενα με τη βοήθεια μοντέλων, στα οποία υπεισέρχονται φυσικά μεγέθη που μπορούν να συγκεκριμενοποιηθούν με αριθμούς, πραγματοποιώντας, κατά κάποιον τρόπο, το «όραμα» του Πυθαγόρα, ο οποίος ήταν ο πρώτος που πίστεψε με πάθος (και με αρκετή δόση μυστικισμού για να πούμε την αλήθεια) ότι ο «αριθμός» είναι η βάση της φυσικής πραγματικότητας. Οι εφαρμοσμένες επιστήμες, μάλιστα, αντικαθιστούν τα φυσικά μεγέθη με αριθμούς και προχωρούν σε αριθμητικούς υπολογισμούς, είτε για να προβλέψουν φυσικά φαινόμενα, είτε για να κατασκευάσουν αντικείμενα, τα οποία θα συμπεριφερθούν κατά ένα προβλέψιμο επιθυμητό τρόπο.

Καθώς τα φαινόμενα συμβαίνουν στο χώρο και το χρόνο, είναι αυτονόητο ότι, τόσο ο χώρος όσο και ο χρόνος, θα πρέπει να παρασταθούν με αριθμούς. Στις εφαρμογές χρειάζεται, αντίστοιχα, η ακριβής μέτρηση των αποστάσεων και του χρόνου. Σήμερα η σχετική ακρίβεια φθάνει στα όρια του nanosecond ( $= 10^{-9}$  δευτερόλεπτα), δίνοντας ακρίβεια μερικών χιλιοστών για αποστάσεις της τάξης της διαμέτρου της γης.

## 1.2 Η μέτρηση του χρόνου

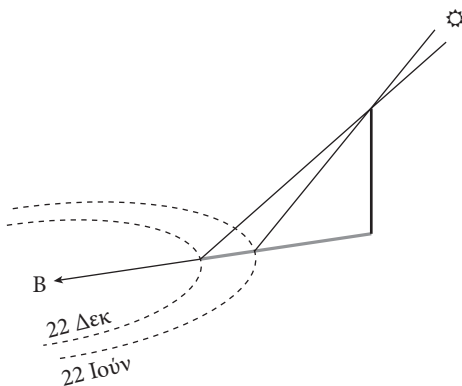
Η μέτρηση του χρόνου ξεκινά με βάση την ημέρα, τον σεληνιακό μήνα και το χρόνο. Πολλές δραστηριότητες της ανθρώπινης ζωής, βασίζονται στη μέτρηση του χρόνου. Ανάμεσά τους, εκείνες που απαιτούν τη μεγαλύτερη ακρίβεια είναι οι θρησκευτικές δραστηριότητες. Η μέτρηση του χρόνου γίνεται αντικείμενο

του μάγου -ιερέα και αργότερα ενός οργανωμένου ιερατείου, που, μονοπωλώντας τη γνώση, επικουρεί την άρχουσα τάξη και αποτελεί την πρώτη μορφή μιας κάστας, η οποία σήμερα έχει αντικατασταθεί από την επιστημονική κοινότητα.

Για το σκοπό της μέτρησης του χρόνου καταρτίζονται ημερολόγια για να καθοριστούν οι μέρες για τις διάφορες ιεροτελεστίες, αλλά και για πιο πρακτικούς σκοπούς, όπως η σπορά των αγρών. Σύντομα γίνεται αντιληπτό πως ούτε ο σεληνιακός μήνας, ούτε η ημέρα είναι μονάδες συμβατές με το έτος. Πράγματι μέσα σε ένα έτος δεν χωρά ακριβώς ένας ακέραιος αριθμός σεληνιακών μηνών (εναλλασσόμενοι μήνες των 29 και 30 ημερών δίνουν έτος 354 μόνο ημερών) αλλά ούτε και ημερών. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιήθηκαν εμβόλιμες ημέρες ή και μήνες.

Η παρέλευση ενός έτους γίνεται αντιληπτή με βάση την ημέρα με το μεγαλύτερο χρονικό διάστημα μεταξύ ανατολής και δύσης, το θερινό ηλιοστάσιο. Η μέρα αυτή μπορεί να καθορισθεί (σχήμα 1) ως η ημέρα κατά την οποία ένας σταθερός πάσσαλος ρίχνει (στο βόρειο ημισφαίριο και σε πλάτη μεγαλύτερα από  $23.5^\circ$ ) την μικρότερη σκιά το μεσημέρι, καθώς ο ήλιος μεσουρανάει στο βορειότερο σημείο, για να στραφεί στη συνέχεια προς νότο, μέχρις ότου φθάσει στο νοτιότερο σημείο κατά το χειμερινό ηλιοστάσιο, με τη μικρότερη δυνατή διάρκεια του φωτισμένου από τον ήλιο διαστήματος της ημέρας.

Πρώτος ο Θαλής (640-546 π.Χ.), με τη βοήθεια του «σκιοθηρικού γνώμονα», προσδιόρισε τη διάρκεια του έτους σε 365 ημέρες. Επαναλαμβανόμενες μετρήσεις στα επόμενα 50 χρόνια διαπίστωσαν την μη σταθερή διάρκεια του αριθμού ημερών μεταξύ θερινών ηλιοστάσιων και οδήγησαν στην σημερινή τιμή των



**Σχήμα 1:**

Προσδιορισμός του θερινού ηλιοστάσιου ως ημέρα με μικρότερη σκιά το μεσημέρι

365.25 ημερών για τη διάρκεια του έτους, τιμή που αποδίδεται στον Κλεόστρατο. Η ανάγκη διατήρησης του σεληνιακού μήνα για λατρευτικούς σκοπούς, οδήγησε στο σύστημα της «οκταετηρίδας», όπου στους  $8 \times 12 = 96$  σεληνιακούς μήνες, με εναλλασσόμενη διάρκεια 29 και 30 ημερών, προστίθεντο 3 εμβόλιμοι μήνες των 30 ημερών, έτσι ώστε στον αρχικό αριθμό των  $96 \times 29.5 = 2832$  να προστεθούν 90 μέρες, για να υπάρξει συγχρονισμός με τις  $2832 + 90 = 2922 = 365.25 \times 8$  ημέρες της διάρκειας των 8 ετών. Σήμερα βέβαια το πρόβλημα ξεπερνιέται εγκαταλείποντας τον σεληνιακό μήνα και προσθέτοντας μία ημέρα κάθε 4 χρόνια στα έτη των 12 μηνών και  $365 (= 7 \times 31 + 4 \times 30 + 28)$  ημερών.

Η αναζήτηση ενός περισσότερο κατάλληλου φυσικού ρολογιού, έστρεψε τον άνθρωπο προς τον ουρανό και οδήγησε στην ανάπτυξη της αστρονομίας. Το πρακτικό αντικείμενο της αστρονομίας, η κατάρτιση δηλαδή ενός αξιόπιστου ημερολογίου καλύπτεται, κάτω από έναν μανδύα, λιγότερο πρακτικό αλλά περισσότερο ελκυστικό, τόσο για την άρχουσα τάξη όσο και για το λαό: την πρόβλεψη του μέλλοντος μέσω της αστρολογίας. Η δεισιδαιμονία αυτή θα επιβιώσει μέσα στην επιστημονική κοινότητα μόνο όσο της είναι βιοποριστικά χρήσιμη, μέχρι τα χρόνια του Kepler, όταν ακόμη σημαντικό αντικείμενο των αστρονόμων ήταν η κατάρτιση ωροσκοπίων για τους ευγενείς εργοδότες τους.

Από την άλλη πλευρά, η μέτρηση μικρών χρονικών διαστημάτων δεν απαιτούσε μεγάλη ακρίβεια και οι σχετικές ανάγκες ικανοποιούνταν με κλεψύδρες και την καύση ισοπαχών κεριών με οριζόντιες υποδιαιρέσεις. Μάλιστα η ώρα δεν υπήρξε αρχικά μια σταθερή χρονική μονάδα, καθώς το ημερήσιο και το νυκτερινό τμήμα του 24ώρου διαιρούνταν, χωριστά το καθένα, σε 12 ώρες. Επομένως η ημερήσια ώρα ήταν μεγαλύτερη από την νυκτερινή ώρα το καλοκαίρι, ενώ το αντίστροφο συνέβαινε το χειμώνα, έτσι ώστε η διάρκεια, τόσο της ημερήσιας όσο και της νυκτερινής ώρας, να εξαρτάται από την εποχή του χρόνου. Μόνο με την έλευση της βιομηχανικής εποχής απαιτήθηκε η πιο ακριβής μέτρηση του χρόνου εργασίας, με μονάδα μία σταθερή ώρα, ίση με το ένα εικοστό τέταρτο της ημέρας. Τότε αναπτύχθηκαν ακριβή ρολόγια με βάση την ταλάντωση του εκκρεμούς, αξιοποιώντας τεχνογνωσία που είχε ήδη αναπτυχθεί, κυρίως για την κατασκευή αυτόματων παιγνιδιών, προορισμένων για τη διασκέδαση των ιδιαίτερα εύπορων.

Όμως η μεγάλη ώθηση στην ανάπτυξη ακριβέστερων χρονομέτρων, η οποία οδήγησε σταδιακά στα σημερινά ατομικά ρολόγια, δεν ήρθε από την ανάγκη της μέτρησης του χρόνου σαν αυτοσκοπό, αλλά σαν ενδιάμεσο στάδιο για τον προσδιορισμό της θέσης, ή την ακριβή μέτρηση αποστάσεων. Καθώς η γη περι-

στρέφεται, ένα σημείο στον ισημερινό μετακινείται κατά μισό χιλιόμετρο σε ένα δευτερόλεπτο. Ο προσδιορισμός του γεωγραφικού μήκους (δηλαδή της θέσης κατά τη διεύθυνση ανατολής-δύσης), για τις ανάγκες της ναυσιπλοΐας, απαιτούσε χρονόμετρα που να διατηρούν ακρίβεια μερικών δευτερολέπτων για όλη τη διάρκεια ενός υπερπόντιου ταξιδιού, δηλαδή για ένα-δύο μήνες. Η ανάγκη αυτή έδωσε την μεγάλη ώθηση στην ανάπτυξη χρονομέτρων μεγάλης ακριβείας, τις λεπτομέρειες της οποίας θα γνωρίσουμε παρακάτω.

### 1.3 Μετρήσεις στο χώρο. Από την γεωμετρία στη γεωδαισία

Η εκτέλεση μετρήσεων, με σκοπό τον προσδιορισμό της θέσης στο χώρο, ξεκίνησε αργότερα από τις σχετικές με το χρόνο μετρήσεις. Η πρώτη ιστορική αναφορά μας δίνεται από τον πατέρα της ιστορίας Ηρόδοτο (485-425 π.Χ.) ο οποίος στην «Ιστορία» του (βιβλίο 2 «Ευτέρπη», 109, 1-12), μας λέει αναφερόμενος στην Αίγυπτο τα εξής:

*Καταναίμαι δὲ τὴν χώραν Αἰγυπτίοισι ἅπασι τοῦτον ἔλεγον τὸν βασιλέα, κλῆρον ἴσον ἐκάστω τετράγωνον διδόντα, καὶ ἀπὸ τούτου τὰς προσόδους ποιήσασθαι, ἐπιτάξαντα ἀποφορὴν ἐπιτελείειν κατ' ἐνιαυτόν. Εἰ δὲ τινος τοῦ κλήρου ὁ ποταμὸς τι παρέλοιτο, ἐλθὼν ἂν πρὸς αὐτὸν ἐσήμαινε τὸ γεγεννημένον ὃ δὲ ἔπεμπε τοὺς ἐπισκεψομένους καὶ ἀναμετρήσοντας ὅσω ἐλάσσων ὁ χώρος γέγονε, ὅπως τοῦ λοιποῦ κατὰ λόγον τῆς τεταγμένης ἀποφορῆς τελέοι. Δοκέει δὲ μοι ἐνθεῦτεν γεωμετρίῃ εὐρεθεῖσα ἐς τὴν Ἑλλάδα ἐπανελθεῖν...*

*Λένε πως ο βασιλιάς μοίρασε τη γη σε όλους τους Αιγυπτίους, δίνοντας σε καθένα ίσος κλήρος, ορίζοντας να πληρώνεται ετήσιος φόρος για τα εισοδήματα που θα προέκυπταν. Εάν ο ποταμὸς παρέσυρε τμήμα του κλήρου κάποιου, αυτός μπορούσε να παρουσιαστεί και να δηλώσει αυτό που έγινε. Τότε (ο βασιλιάς) έστειλε ανθρώπους να επισκεφτούν το μέρος και να μετρήσουν κατά πόσο μειώθηκε το εμβαδόν του κλήρου, ώστε να μειωθεί αναλογικά και ο φόρος. Μου φαίνεται λοιπόν πως η γεωμετρία επινοήθηκε εκεί και από εκεί ήλθε στην Ελλάδα...*

Αυτό που ο Ηρόδοτος αποκαλεί «γεωμετρία», χωρίς να αισθάνεται την ανάγκη παραπέρα διευκρίνησης προς τους αναγνώστες του, είναι αυτό που σήμερα απο-



καλούμε «τοπογραφία» και όχι η γεωμετρία με τη σημερινή έννοια του συγκεκριμένου κλάδου των μαθηματικών.

Πράγματι οι άνθρωποι του βασιλιά της Αιγύπτου εκτελούν τυπικές τοπογραφικές εργασίες αποτύπωσης. Από έναν αιγυπτιακό πάπυρο μάλιστα, μαθαίνουμε πως οι άνθρωποι αυτοί ονομαζόταν με μία λέξη που στα αιγυπτιακά σημαίνει στην κυριολεξία «αυτοί που τεντώνουν τα σχοινιά» – «σχοινο-τανυστές». Προφανώς σχοινιά με κόμπους σε ίσες αποστάσεις αποτελούσαν τον πρόδρομο της σημερινής μετροταινίας.

Έναν αιώνα αργότερα ο μεγάλος Έλληνας φιλόσοφος Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.) μας λέει στο βιβλίο του «Μετά τα Φυσικά» (997, 26-28)

*... εἰ γὰρ τούτῳ διοίσει τῆς γεωδαισίας ἢ γεωμετρίας μόνον, ὅτι ἢ μὲν τούτων ἐστὶν ὧν αἰσθανόμεθα ἢ δ' οὐκ αἰσθητῶν.*

*... κατὰ τούτο μόνο διαφέρει ἀπὸ τῆς γεωδαισίας ἡ γεωμετρία, κατὰ τὸ ὅτι ἡ πρώτη ἀσχολεῖται γιὰ ὅσα μπορούμε νὰ ἀντιληφθούμε μὲ τὶς αἰσθήσεις μας ἐνῶ ἡ δευτέρα μὲ τὰ μὴ αἰσθητά..*

Μέσα σε ένα μόνον αιώνα, η λέξη γεωμετρία έχει χάσει το κυριολεκτικό της νόημα (μέτρηση της γης), καθώς ασχολείται πλέον με ιδεατά και όχι πραγματικά αντικείμενα, ενώ για την πρακτική τοπογραφία έχει επινοηθεί ένας νέος όρος: «γεωδαισία», από τη λέξη «γαία» και το ρήμα “δαίζω” που σημαίνει κατανέμω. Φαίνεται πως η κατανομή γης παραμένει το κύριο τοπογραφικό αντικείμενο.

Η λέξη «γεωδαισία» ανασύρθηκε και τέθηκε σε χρήση εκ νέου από τους επιστήμονες των μετά την Αναγέννηση χρόνων, όταν τα αρχαία ελληνικά και τα λατινικά αποτελούσαν απαραίτητο εφόδιο κάθε μορφωμένου ανθρώπου. Με την ευκαιρία ο μεγάλος Ολλανδός τοπογράφος Snell, που εισήγαγε στις αποτυπώσεις τη μέθοδο του τριγωνισμού, κέρδιζε τα προς το ζην, για ένα διάστημα της ζωής του, ως δάσκαλος των αρχαίων ελληνικών. Σταδιακά ο όρος γεωδαισία κατέληξε σήμερα να αναφέρεται στην αποτύπωση ολόκληρης της γης, ενώ η αποτύπωση μικρότερων τμημάτων καλύπτεται από το νέο όρο «τοπογραφία». Εν τούτοις ο τοπογράφος ονομάζεται ακόμα «γεωμέτρης» στην Γαλλία (géomètre) και την Ιταλία (geometra).

Τι έχει μεσολαβήσει λοιπόν στα χρόνια από τον Ηρόδοτο μέχρι τον Αριστοτέλη, ώστε η πρακτική «γεωμετρία» να χάσει την αρχική της κυριολεκτική έννοια και να χρειαστεί να αντικατασταθεί από τον καινούργιο όρο «γεωδαισία»; Μια

σειρά Ελλήνων διανοητών, από τους φυσικούς φιλόσοφους της Ιωνίας, με προεξέχοντα τον Μιλήσιο Θαλή, μέχρι τον Πλάτωνα, τον δάσκαλο του Αριστοτέλη, επινόησαν τον «καταλύτη» της παραπέρα ανάπτυξης της ανθρώπινης σκέψης, που έκανε τον Ελληνικό πολιτισμό να διαφέρει από κάθε άλλο μεγάλο πολιτισμό και που οδήγησε τελικά στην σύγχρονη ανάπτυξη των επιστημών, στο πλαίσιο αυτού που ονομάζουμε «δυτικό πολιτισμό». Πρόκειται βέβαια για την ιδέα της «αφαίρεσης». Από τα υλικά σημεία και τις υλικές γραμμές που ο γεωμέτρης-τοπογράφος χάραζε στο έδαφος, έφτασαν στις αντίστοιχες αφηρημένες έννοιες της γραμμής και του σημείου, με τις οποίες εξοικειωθήκαμε στο μάθημα της γεωμετρίας στη Μέση Εκπαίδευση. Έτσι αναπτύχθηκε μια «γεωμετρία» που δεν είχε να κάνει άμεσα ούτε με τη γη, ούτε με τη μέτρηση. Βασιζόταν σε λογικούς συνειρμούς οι οποίοι ξεκινούσαν από ορισμένες «αυταπόδεικτες» αλήθειες, τα «αξιώματα», και έφθαναν σε νέες αλήθειες, τα «θεωρήματα», σχετικές με τα αφηρημένα σχήματα που μπορούσαν να κατασκευασθούν από αφηρημένα σημεία και γραμμές. Το ότι τα αποτελέσματα αυτής της γνώσης θα μπορούσαν να εφαρμοστούν και σε πραγματικά σχήματα, δεν φαίνεται να απασχολούσε ιδιαίτερα την τάξη των αργόσχολων διανοητών μιας κοινωνίας που είχε λύσει τα «οικονομικά» της προβλήματα μέσα από το θεσμό της δουλείας. Για τους Έλληνες η γεωμετρία ήταν τα κατ' εξοχήν μαθηματικά με τη σημερινή έννοια του όρου. Ο όρος «μαθηματική» κάλυπτε το σύνολο της επιστημονικής γνώσης, θεωρητικής και πρακτικής. Όπως μας πληροφορεί ο Ήρων, οι περιοχές γνώσης στην αρχαία Ελλάδα ήταν οκτώ: δύο θεωρητικές, η αριθμητική και η γεωμετρία, και έξι εφαρμοσμένες, η λογιστική και η κανονική (κατασκευή μουσικών οργάνων), συγγενείς της αριθμητικής, η οπτική και η γεωδαισία, συγγενείς της γεωμετρίας και η μηχανική και η αστρονομία, συγγενείς και των δύο.

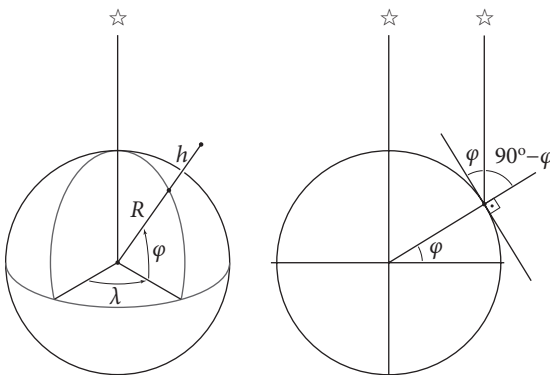
#### 1.4 Μετρήσεις στο χώρο. Σχήμα και θέση

Ας ξαναγυρίσουμε στο έργο του γεωμέτρη - τοπογράφου. Ο προσδιορισμός του σχήματος (έννοια στην οποία συμπεριλαμβάνουμε και το μέγεθος) των κλήρων σε μια περιοχή, σε σχέση με ένα οριζόντιο επίπεδο, είναι δυνατή μέσα από μετρήσεις μηκών και γωνιών. Η μέτρηση γωνίας πρέπει να είναι μεταγενέστερη επειδή απαιτούνται όργανα περισσότερο πολύπλοκα. Αν θεωρήσουμε πολυγωνικά αγροτεμάχια, αυτά μπορούν να χωριστούν σε τρίγωνα, που προσδιορίζονται πλήρως αν είναι γνωστά τα μήκη των πλευρών τους. Αν για κάποιο λόγο,

μια πλημμύρα για παράδειγμα, χαθούν τα ορόσημα, οι καταγραμμένες μετρήσεις των μηκών μάς επιτρέπουν να σχηματίσουμε ξανά στο έδαφος το σχήμα του συνόλου των αγροτεμαχίων, αλλά όχι και να το τοποθετήσουμε στην σωστή του θέση, εκτός αν έχουν διασωθεί δύο ορόσημα, ή τουλάχιστον ένα ορόσημο και μία χαραγμένη πλευρά που να διέρχεται από αυτό. Χρειαζόμαστε λοιπόν ένα «σύστημα αναφοράς», για να προσδιορίσουμε όχι μόνο το σχήμα αλλά και τη «θέση» των σημείων πάνω στη γη.

Περνώντας στην κλίμακα του συνόλου της γης (από την τοπογραφική στη γεωδαιτική κλίμακα όπως θα λέγαμε σήμερα) τίθεται ξανά το πρόβλημα του προσδιορισμού της θέσης σημείων, αρχικά με βάση τον άξονα ανατολής-δύσης που ορίζεται από την καθημερινή πορεία του ήλιου στον ουρανό, πάνω από μία φαινομενικά επίπεδη γη. Οι τόποι πρέπει να τοποθετηθούν σωστά σε σχέση ο ένας με τον άλλο: κάθε τόπος είναι δυτικότερα ή ανατολικότερα και συνάμα βορειότερα ή νοτιότερα από κάθε άλλον τόπο.

Με την κατανόηση της σφαιρικότητας της γης και την ανάπτυξη της μελέτης της θέσης και της κίνησης των άστρων, της αστρονομίας δηλαδή, λύνεται εν μέρει το πρόβλημα αυτό. Η παρατήρηση του ουράνιου θόλου δείχνει ότι αυτός περιστρέφεται γύρω από έναν νοητό άξονα, που στο βόρειο ημισφαίριο φαίνεται ουσιαστικά να περνά από ένα συγκεκριμένο άστρο, τον πολικό αστέρα στον αστερισμό της Μικρής Αρκτου. Παράλληλα γίνεται αντιληπτό ότι η γωνία του πολικού πάνω από τον ορίζοντα, μεγαλώνει όταν κανείς ταξιδεύει προς βορρά και μικραίνει προς το νότο. Η γωνία αυτή είναι το γεωγραφικό πλάτος  $\varphi$  (σχήμα 2), που αποτελεί μία από τις γεωγραφικές συντεταγμένες που καθορίζουν τη θέση πάνω στη σφαιρική επιφάνεια της γης, με μηδενική τιμή στον ισημερινό, θετικές τιμές, από  $0^\circ$  έως  $90^\circ$ , στο βόρειο ημισφαίριο και αρνητικές, από  $0^\circ$  έως



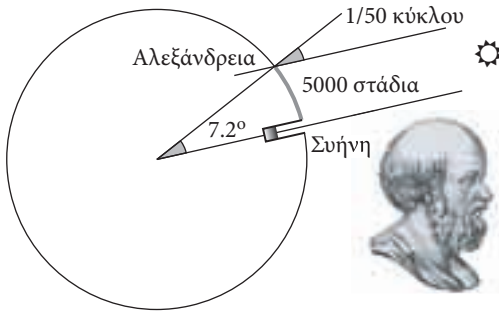
**Σχήμα 2:**

Καθορισμός του γεωγραφικού πλάτους  $\varphi$  με τη βοήθεια του πολικού αστέρα

$-90^\circ$ , στο νότιο. Ο προσδιορισμός της απόλυτης θέσης και όχι μόνο της σχετικής (βορειότερα-νοτιότερα) γίνεται εφικτή χάρις στην ύπαρξη του άξονα περιστροφής, που αποτελεί ένα φυσικό «σύστημα αναφοράς» για τα γεωγραφικά πλάτη. Αντίθετα, για την άλλη γεωγραφική συντεταγμένη, το γεωγραφικό μήκος  $\lambda$ , δεν υπάρχει ένα φυσικό «σύστημα αναφοράς» και η θέση όπου  $\lambda = 0^\circ$ , πρέπει να επιλεγεί αυθαίρετα, ως αποτέλεσμα μιας γενικά αποδεκτής σύμβασης. Στους νεότερους χρόνους η σχετική σύμβαση επιλέγει ως «αρχή της μέτρησης των μηκών» το αστεροσκοπείο του Greenwich στην Αγγλία. Στην αρχαιότητα ως πρώτη αρχή των μηκών χρησιμοποιήθηκε η πόλη της Ρόδου, στη συνέχεια η Αλεξάνδρεια και την εποχή του Πτολεμαίου η Θούλη (Κανάριοι Νήσοι;), ως «δυτικό άκρο της οικουμένης», ώστε να έχουν όλοι οι τόποι θετικό μήκος.

Το μήκος  $\lambda$  και το πλάτος  $\varphi$  αποτελούν τις πρώτες συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται για να μετατραπεί ένα φυσικό χαρακτηριστικό, η θέση πάνω στη γη, σε ένα ζεύγος αριθμών. Η εισαγωγή τους αποδίδεται στον Δικαίαρχο, μαθητή του Αριστοτέλη. Είναι όμως πιθανόν συντεταγμένες να χρησιμοποιήθηκαν πρώτα για τη θέση των άστρων πάνω στον ουράνιο θόλο. Η χρήση τους γενικεύεται από τον Πτολεμαίο, ο οποίος στο έργο του «Γεωγραφική Υφήγησις» δίνει τα πλάτη και τα μήκη και πλάτη 8000 περίπου τοπωνυμίων, με ικανοποιητικές τιμές για τα πλάτη αλλά με σχετικά λανθασμένα μήκη.

Τα γωνιακά μεγέθη  $\lambda$  και  $\varphi$  δεν επαρκούν για τον προσδιορισμό αποστάσεων πάνω στη σφαιρική γη, αλλά χρειάζεται επιπλέον να ξέρουμε το μέγεθος της ακτίνας της γης. Στην αρχαιότητα μετρήσεις της περιμέτρου της γης έγιναν από τον Εύδοξο (407-354 π.Χ.) αστρονόμο της Πλατωνικής Ακαδημίας και τον αστρονόμο-εξερευνητή Πυθέα γύρω στα 330 π.Χ., χωρίς όμως ικανοποιητικά αποτελέσματα. Η πιο επιτυχής όμως μέτρηση, ή τουλάχιστον η περισσότερο γνωστή σήμερα, έγινε από τον επικεφαλής της περίφημης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας γεωγράφο Ερατοσθένη (276-194 π.Χ.), ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί, για το λόγο αυτό, ως ο πρώτος γεωδαίτης. Ο Ερατοσθένης παρατήρησε ότι όταν κατά το θερινό ηλιοστάσιο, ο ήλιος καθρεφτίζεται σε ένα πηγάδι στη Συήνη (σχήμα 3), δηλαδή όταν οι ακτίνες πέφτουν κατακόρυφα, την ίδια ημέρα σχηματίζει γωνία  $1/50$  του κύκλου ( $7.2^\circ$ ) με την κατακόρυφο στην Αλεξάνδρεια, που βρίσκεται 5000 στάδια βορειότερα. Στο σύνολο της περιμέτρου της γης αντιστοιχεί τιμή 50 φορές μεγαλύτερη, ίση με 250000 στάδια. Δεν είναι απόλυτα βέβαιη η τιμή του σταδίου που χρησιμοποιούσε ο Ερατοσθένης. Για το ελληνικό στάδιο των 164 km, η τιμή των 41000 km είναι μόλις κατά 2.3% μεγαλύτερη



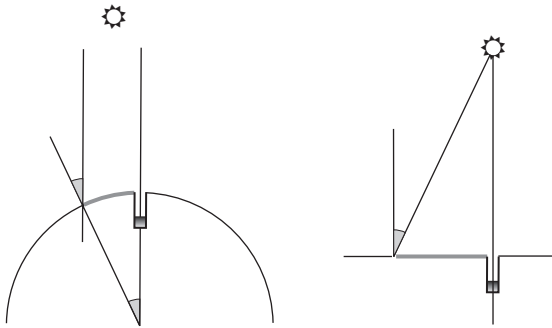
**Σχήμα 3:**

*Η μέτρηση της περιμέτρου της γης από τον Ερατοσθένη*

από την πραγματική τιμή των 40075 km για την ισημερινή περίμετρο. Για το αλεξανδρινό στάδιο των 157.5 km, προκύπτει περίμετρος 39375 km, κατά 1.75% μικρότερη από την πραγματική! Η τιμή αυτή επαληθεύτηκε από τον Ερατοσθένη, όπως μας πληροφορεί ο Στράβωνας, ο οποίος μέτρησε το τόξο Αλεξάνδρειας-Ρόδου με σκιοθηρικό γνώμονα. Πολύ κοντά στην πραγματικότητα είναι και η τιμή των 40000 σταδίων για την ακτίνα της γης που έδωσε ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) (αντίστοιχη τιμή περιμέτρου 251327 στάδια), για την οποία όμως δεν γνωρίζουμε τη μέθοδο προσδιορισμού. Αργότερα ο Ίππαρχος (190-120 π.Χ.) μετέβαλε την τιμή του Ερατοσθένη σε 252000 στάδια. Μια λανθασμένη μέτρηση από τον Ποσειδώνιο (135-51 π.Χ.) έδωσε την τιμή των 180000 σταδίων, η οποία υιοθετήθηκε από τον Πτολεμαίο (100-178 μ.Χ.).

Το πείραμα του Ερατοσθένη είναι ένα εξαιρετικό παράδειγμα της σημασίας που έχει η χρησιμοποίηση ενός σωστού μοντέλου στην ανάλυση των παρατηρήσεων. Ο Ερατοσθένης θεώρησε δεδομένη τη σφαιρικότητα της γης και υπέθεσε πως ο ήλιος βρισκόταν πάρα πολύ μακριά, έτσι ώστε οι ακτίνες του να φθάνουν ουσιαστικά παράλληλες σε διαφορετικά μέρη της γης. Αν πίστευε πως η γη είναι επίπεδη και πως η απόσταση του ήλιου είναι σχετικά μικρή, θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει ακριβώς τα ίδια στοιχεία (σχήμα 4) για να υπολογίσει την απόσταση γης-ηλίου!

Η μέτρηση του πλάτους  $\varphi$  είναι πολύ εύκολη με ένα γωνιόμετρο (σχήμα 2) που η αρχή του τοποθετείται στην κατακόρυφο, οπότε με σκόπευση του πολικού προσδιορίζεται η συμπληρωματική γωνία  $90^\circ - \varphi$ . Η μέτρηση του μήκους  $\lambda$ , ή για την ακρίβεια της διαφοράς μήκους, δεν είναι καθόλου εύκολη και χρειάστηκαν πολλοί αιώνες για να γίνει εφικτή. Αν γνωρίζουμε πότε μεσουρανήει ένα άστρο σε έναν τόπο, π.χ. στο αστεροσκοπείο του Greenwich, καθώς η γη περιστρέφεται από δυσμάς προς τα ανατολάς, θα μεσουρανήσει νωρίτερα για ένα

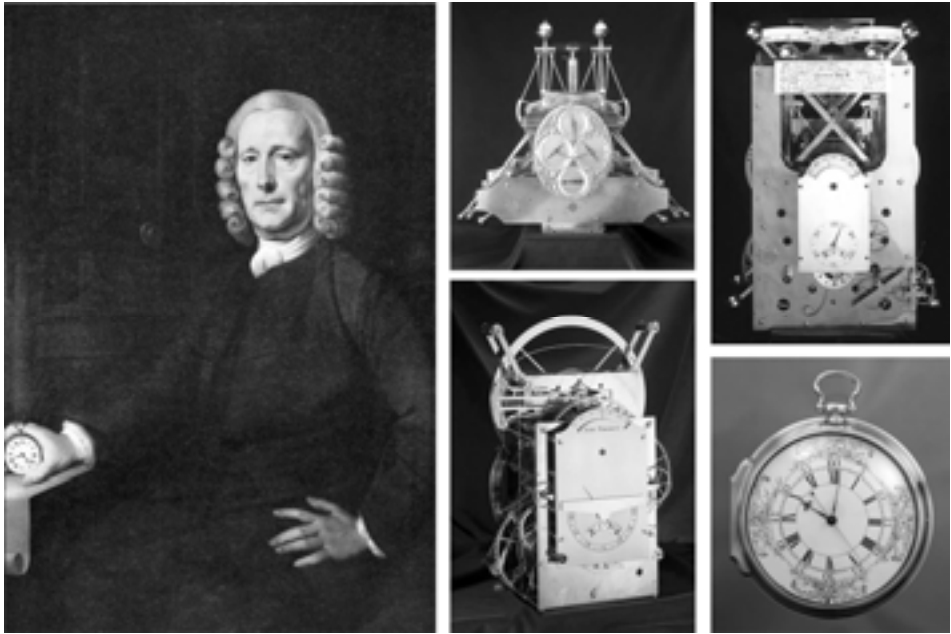


**Σχήμα 4:**

Ο ρόλος του μοντέλου στην ανάλυση παρατηρήσεων (προσδιορισμός της απόστασης του ήλιου αξιοποιώντας τις παρατηρήσεις του Ερατοσθένη με λάθος μοντέλο!)

τόπο στα ανατολικά και αργότερα για ένα τόπο στα δυτικά του Greenwich. Η χρονική διαφορά θα είναι ανάλογη της διαφοράς μήκους (που σε σχέση με το Greenwich είναι το ίδιο το μήκος). Αφού σε 24 ώρες αντιστοιχούν οι  $360^\circ$  μιας πλήρους περιστροφής, σε κάθε ώρα αντιστοιχούν  $360^\circ/24 = 15^\circ$ . Αρκεί λοιπόν να διαθέτουμε ένα κατάλογο με τους χρόνους μεσουράνησης στο Greenwich των πιο σημαντικών άστρων για κάθε μέρα του χρόνου, και ένα ρολόι που να δείχνει τον χρόνο στο Greenwich. Το πρόβλημα όμως ήταν αρχικά η χαμηλή ακρίβεια των πρώτων χρονομέτρων που έχαναν αρκετά λεπτά κάθε εικοσιτετράωρο, ενώ οι ανάγκες της ναυσιπλοΐας απαιτούσαν, όπως ήδη αναφέραμε, ακρίβεια κάτω από το δευτερόλεπτο. Καθώς η γη περιστρέφεται, ένα σημείο στον ισημερινό διανύει στο χώρο περίπου μισό χιλιόμετρο (463 m) ανά δευτερόλεπτο και 28 περίπου χιλιόμετρα ανά λεπτό. Επομένως, για την σχετικά ακριβή μέτρηση του γεωγραφικού μήκους κατά τη διάρκεια ενός πολυήμερου θαλάσσιου ταξιδιού, χρειάζεται χρονόμετρο που να μη χάνει περισσότερο από μερικά δευτερόλεπτα ανά ημέρα.

Όμως, για πολλά χρόνια, τα διαθέσιμα χρονόμετρα δεν μπορούσαν να διατηρήσουν το χρόνο με ικανοποιητική ακρίβεια για το μεγάλο χρονικό διάστημα των υπερωκεάνιων ταξιδιών και η παραπάνω απλή μέθοδος δεν ήταν πρακτικά εφαρμόσιμη. Προτάθηκαν μάλιστα διάφορες εναλλακτικές μέθοδοι, βασισμένες στην παρατήρηση αστρονομικών φαινομένων χωρίς τη χρήση χρονομέτρου. Εξάλλου, η πρώτη μέτρηση διαφοράς μήκους από τον Ίππαρχο, στηριζόταν σε μια αστρονομική μέθοδο, την χρησιμοποίηση μιας σεληνιακής έκλειψης για την «μεταφορά του χρόνου» από ένα σημείο σε ένα άλλο. Καθώς η έκλειψη είναι πρακτικά ένα ταυτόχρονο γεγονός, αρκεί να συγκριθεί η ώρα της ημέρας κατά την οποία συνέβη η έκλειψη σε δύο τόπους, εκφρασμένη σε κλάσμα της ημέρας μετρημένης από ανατολή σε ανατολή ή από δύση σε δύση του ηλίου. Η δια-



**Σχήμα 5:** Ο John Harrison και τα 4 κατά σειρά χρονόμετρα του (H1, H2, H3 και H4) με το τελευταίο από τα οποία κέρδισε το βραβείο 20000 λιρών για τον αξιόπιστο προσδιορισμό του γεωγραφικού μήκους

φορά ώρας σε κλάσμα της ημέρας είναι ίση με την διαφορά μήκους (διαφορά χρόνων ανατολής ή δύσης) εκφρασμένη σε κλάσμα του κύκλου.

Η ανάγκη εύρεσης μιας αξιόπιστης μεθόδου για τον προσδιορισμό του μήκους, οδήγησε στην θεσμοθέτηση ενός μεγάλου χρηματικού βραβείου στην Αγγλία το 1714, το οποίο ύστερα από μία περιπετειώδη προσπάθεια και πολύχρονη διεκδίκηση κέρδισε το 1773 ο John Harrison, με την κατασκευή ενός ικανοποιητικού χρονομέτρου.

Το μήκος  $\lambda$  και το πλάτος  $\varphi$ , δίνουν τη θέση ενός σημείου πάνω στη σφαιρική επιφάνεια της γης. Επειδή ο πραγματικός κόσμος είναι τρισδιάστατος πρέπει να συμπληρωθούν από μία ακόμα συντεταγμένη, το ύψος  $h$  πάνω από την επιφάνεια (σχήμα 2), που για το σφαιρικό μοντέλο της γης δίνεται από τη σχέση  $h = r - R$ , όπου  $r$  είναι η απόσταση του σημείου από το κέντρο της σφαίρας και  $R$  η ακτίνα της σφαιρικής γης.

Στην πραγματικότητα όμως, η θέση την οποία περιγράφουν οι συντεταγμένες

δεν είναι κάτι το απόλυτο. Εκείνο που πραγματικά υπάρχει είναι το σχήμα το οποίο σχηματίζουν τα διάφορα υλικά σημεία πάνω στην επιφάνεια της γης, καθένα από τα οποία κατέχει μία θέση σε σχέση με τα άλλα σημεία και μόνο. Η «απόλυτη θέση» που καθορίζουν οι συντεταγμένες  $\lambda$ ,  $\varphi$ ,  $h$ , ενός τυχόντος σημείου  $P$ , είναι συνέπεια ορισμένων λίγο-πολύ αυθαίρετων επιλογών: Τα  $\lambda$  και  $\varphi$  έχουν τιμές που εξαρτώνται από την επιλογή του άξονα περιστροφής της γης ως ευθείας αναφοράς. Το πλάτος  $\varphi$  είναι η συμπληρωματική γωνία της γωνίας  $90^\circ - \varphi$  που σχηματίζει η ευθεία  $OP$ , από το κέντρο της σφαίρας  $O$  στο σημείο  $P$ , με τον άξονα περιστροφής. Το μήκος  $\lambda$  είναι μια διέδρη γωνία μεταξύ δύο επιπέδων, που τέμνονται στον άξονα περιστροφής: το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο (μεσημβρινός του  $P$ ) και το επίπεδο που διέρχεται από το αστεροσκοπείο του Greenwich (μεσημβρινός του Greenwich). Έτσι το μήκος  $\lambda$  εξαρτάται εκτός από τον άξονα περιστροφής και από την εντελώς αυθαίρετη επιλογή του Greenwich ως σημείου αναφοράς για τη μέτρηση των μηκών. Το ύψος  $h$  εξαρτάται από την επιλογή της ακτίνας της γης  $R$ , η οποία επιλέγεται έτσι ώστε η επιφάνεια της σφαίρας να αντιστοιχεί στην επιφάνεια της θάλασσας.

Πρέπει να σημειωθεί, ότι στις μετρήσεις, για τον προσδιορισμό του μήκους ή του πλάτους, δεν υπεισέρχεται, όπως στους σχετικούς ορισμούς, η ευθεία  $OP$ , η οποία δεν είναι φυσικά προσβάσιμη, αλλά η διεύθυνση της κατακορύφου στο σημείο  $P$ , δηλαδή η διεύθυνση που σχηματίζει εκεί το νήμα της στάθμης κάτω από την επίδραση της βαρύτητας. Επομένως υποτίθεται πως η κατακόρυφος, σε οποιοδήποτε σημείο  $P$ , κατευθύνεται προς το κέντρο της γήινης σφαίρας. Η «εμπλοκή» του πεδίου βαρύτητας, στις παρατηρήσεις για τον προσδιορισμό της θέσης πάνω στη γη, απέκτησε ιδιαίτερη σημασία, όπως θα δούμε εκτενέστερα στη συνέχεια, ώστε η σύγχρονη επιστήμη της γεωδαισίας να έχει ως αντικείμενο, όχι μόνο το σχήμα της γης (την αποτύπωση της γης στο σύνολο της), αλλά και την μελέτη του πεδίου της γήινης βαρύτητας.

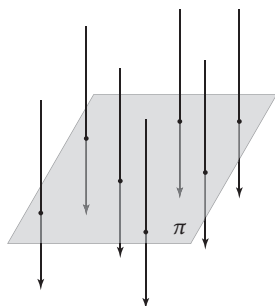
Ο άξονας περιστροφής της γης, το αστεροσκοπείο του Greenwich και η επιφάνεια της θάλασσας, αποτελούν, κατά κάποιον τρόπο, ένα επιλεγμένο «σύστημα αναφοράς», το οποίο προσδίδει στις υπαρκτές σχετικές θέσεις των σημείων (του «σχήματος» δηλαδή που αυτά σχηματίζουν), μία μη πραγματική, αλλά εντούτοις βολική, «απόλυτη θέση». Κάποια από τα χαρακτηριστικά του «συστήματος αναφοράς» μάς τα διαθέτει η ίδια η φυσική πραγματικότητα (άξονας περιστροφής, επιφάνεια της θάλασσας), ενώ άλλα (αστεροσκοπείο του Greenwich) είναι αποτέλεσμα μιας εντελώς αυθαίρετης συμβατικής (δηλαδή κοινά αποδεκτής) επιλογής. (Τα εισαγωγικά, μέσα στα οποία βάζουμε το «σύστημα αναφοράς»,



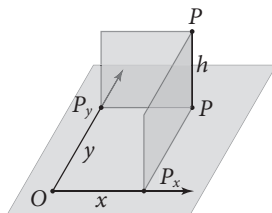
έχουν σκοπό να το διακρίνουν από την συγκεκριμένη ακριβή μαθηματική έννοια του συστήματος αναφοράς με την οποία θα ασχοληθούμε εξαντλητικά στα επόμενα κεφάλαια.)

Το «σύστημα αναφοράς», δεν είναι ένα φυσικό αντικείμενο, αλλά μία μαθηματική επινόηση, η οποία μας επιτρέπει να αντιστοιχίσουμε, σε κάθε φυσικό υλικό σημείο του τρισδιάστατου χώρου, μια τριάδα αριθμών (στη συγκεκριμένη περίπτωση τις γεωγραφικές συντεταγμένες  $\lambda$ ,  $\varphi$ ,  $h$ ), οι οποίοι μετατρέπουν το φυσικό σημείο σε ένα μαθηματικό αντικείμενο. Η διαδικασία αυτή είναι απαραίτητη για τη μελέτη της φυσικής πραγματικότητας, μέσω ενός εξιδανικευμένου μαθηματικού μοντέλου, που στηρίζεται σε αφηρημένες έννοιες όπως αυτές του σημείου και της γραμμής. Το σύστημα αναφοράς δεν είναι παρά ένα τμήμα του μαθηματικού μοντέλου.

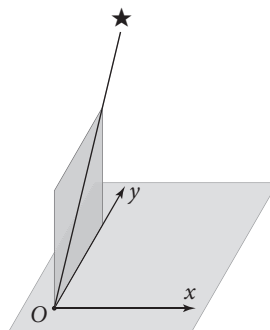
Για να καταλάβουμε καλύτερα το αυθαίρετο της επιλογής ενός συστήματος αναφοράς, θα περάσουμε από την κλίμακα της γεωδαισίας στην κλίμακα της τοπογραφίας και θα υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποτυπώσουμε ένα μικρό τμήμα της γης, σε μία περιοχή μακριά από τη θάλασσα, διαθέτοντας μόνο μία μετροταινία και ένα θεοδόλιχο για τη μέτρηση οριζόντιων και κατακόρυφων γωνιών. Στα όρια της μικρής περιοχής, η διεύθυνση της κατακόρυφου σε κάθε σημείο, η οποία υλοποιείται με τη διαδικασία της οριζοντίωσης του θεοδόλιχου, είναι αμετάβλητη, δηλαδή όλες οι διευθύνσεις είναι πρακτικά παράλληλες μεταξύ τους. Αυτό μας επιτρέπει να διαχωρίζουμε την αποτύπωση ενός συνόλου σημείων σε οριζόντια αποτύπωση και σε κατακόρυφη (υψομετρική) αποτύπωση. Για να περιγραφεί η θέση των σημείων με συντεταγμένες, πρέπει να διαλέξουμε ένα «σύστημα αναφοράς». Από όλα τα επίπεδα που είναι κάθετα στις παράλληλες διευθύνσεις της κατακόρυφου, πρέπει να επιλέξουμε αυθαίρετα ένα επίπεδο  $\pi$  το οποίο θα αποτελεί την αφετηρία για την μέτρηση των υψών (σχήμα 6α). Μέσα στο επίπεδο αυτό πρέπει να επιλέξουμε αυθαίρετα ένα σημείο  $O$  και δύο κάθετους οριζόντιους άξονες  $Ox$ ,  $Oy$  που να διέρχονται από αυτό (σχήμα 6β), πάνω στους οποίους επιλέγεται μία φορά ως θετική. Αν  $P'$  είναι η προβολή τυχόντος σημείου  $P$  πάνω στο επίπεδο  $\pi$ , η απόσταση  $h = \pm P'P$  αποτελεί το ύψος του σημείου  $P$ , θετικό αν αυτό βρίσκεται πάνω από το  $\pi$  και αρνητικό σε διαφορετική περίπτωση. Αν  $P_x$  και  $P_y$  είναι οι προβολές του σημείου  $P'$ , πάνω στους άξονες  $Ox$  και  $Oy$ , αντίστοιχα, τότε οι αποστάσεις  $x = \pm OP_x$  και  $y = \pm OP_y$  αποτελούν τις οριζόντιες συντεταγμένες του σημείου  $P$ , με θετικό ή αρνητικό πρόσημο, ανάλογα με τον αν οι προβολές  $P_x$ ,  $P_y$ , βρίσκονται στα θε-



Σχήμα 6α



Σχήμα 6β



Σχήμα 6γ

τικά ή στα αρνητικά σκέλη των αξόνων. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το σύστημα αναφοράς είναι εντελώς αυθαίρετο. Παρόμοια είναι και η αντιμετώπιση, όταν ένα σύστημα αναφοράς απαιτείται για την περιγραφή ενός πειράματος μέσα σε ένα εργαστήριο. Βέβαια δεν αποκλείεται η χρήση κάποιων φυσικών χαρακτηριστικών για τον ορισμό του συστήματος αναφοράς. Αν υπάρχει πρόσβαση στη θάλασσα, τότε το επίπεδο  $\pi$  μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να ταυτίζεται τοπικά με το επίπεδο της θάλασσας. Αν ο θεοδόλιχος διαθέτει σύστημα φωτισμού για νυκτερινές παρατηρήσεις, τότε είναι δυνατόν να σκοπεύσουμε τον πολικό αστέρα και στη συνέχεια να επιλέξουμε τις διευθύνσεις των αξόνων, έτσι ώστε η διεύθυνση του πολικού να περιέχεται στο επίπεδο που σχηματίζουν η κατακόρυφη διεύθυνση στο σημείο  $O$  με τον άξονα  $Oy$  (σχήμα 5γ). Στην περίπτωση αυτή οι συντεταγμένες  $x$  και  $y$  έχουν τη διεύθυνση της ανατολής και του βορρά, αντίστοιχα. Αν ο θεοδόλιχος δεν διαθέτει σύστημα φωτισμού αλλά μπορεί να συνδυαστεί με μαγνητική πυξίδα, τότε οι άξονες  $Ox$  και  $Oy$  μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε να έχουν αντίστοιχα τις διευθύνσεις της μαγνητικής ανατολής και του μαγνητικού βορρά, που δεν ταυτίζονται με τις αντίστοιχες αστρονομικές διευθύνσεις.

Ένα μαθηματικό μοντέλο αποτελεί πάντοτε μια απλοποιημένη εικόνα της εξαιρετικά πολύπλοκης φυσικής πραγματικότητας. Η μικρότερη, ή μεγαλύτερη, απλοποίηση ενός μαθηματικού μοντέλου εξαρτάται άμεσα από την ακρίβεια των διαθέσιμων παρατηρήσεων, που θα χρησιμοποιηθούν για να αναλυθεί η φυσική πραγματικότητα στα πλαίσια του συγκεκριμένου μοντέλου. Καθώς οι τεχνικές παρατήρησης και τα σχετικά όργανα μέτρησης βελτιώνονται, είναι σε θέση να «δουν» περισσότερες λεπτομέρειες της φυσικής πραγματικότητας, οδη-

γώντας έτσι στην ανάγκη για ένα λιγότερο απλοποιημένο μοντέλο. Στη συγκεκριμένη μας περίπτωση, το μαθηματικό μοντέλο της σφαιρικής γης με την κατακόρυφο να κατευθύνεται πάντοτε προς το κέντρο της σφαίρας, υπήρξε χρήσιμο, όσο οι απαιτήσεις των σχετικών εφαρμογών και η ακρίβεια των πραγματοποιησίων παρατηρήσεων δεν μας επέτρεπε να δούμε ότι το σχήμα της γης και η μορφή του πεδίου βαρύτητας είναι περισσότερο πολύπλοκα από ότι περιγράφεται στο πρωταρχικό αυτό μαθηματικό μοντέλο. Την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών μοντέλων για το σχήμα της γης και το πεδίο βαρύτητας, κάτω από την πίεση των εφαρμογών και χάρις στις εξελίξεις στις τεχνικές των παρατηρήσεων, θα την εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

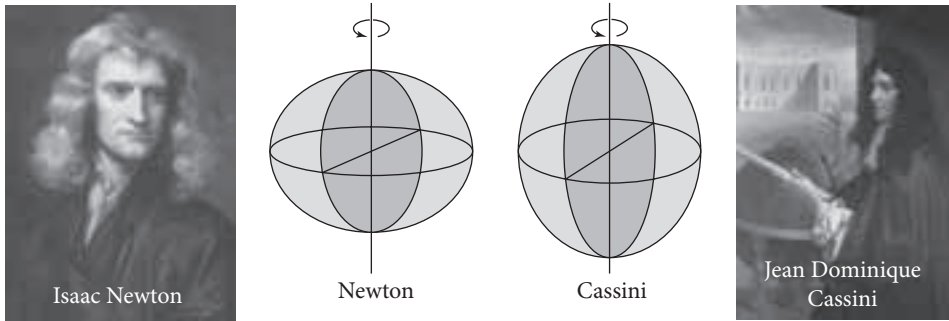
## 1.5 Εξέλιξη των μαθηματικών μοντέλων για το σχήμα της γης και το πεδίο βαρύτητας



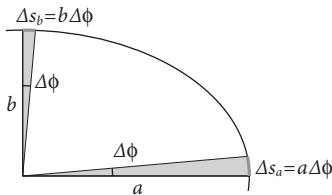
*Charles Marie  
La Condamine*

Στους νεότερους χρόνους έγινε αντιληπτό ότι το σχήμα της γης δεν είναι σφαιρικό αλλά μάλλον ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής πεπλατυσμένου στους πόλους, το σχήμα δηλαδή που προκύπτει αν μία έλλειψη περιστραφεί γύρω από τον μικρότερο άξονά της (σχήμα 7). Ο πρώτος που το κατάλαβε αυτό ήταν ο Νεύτωνας, ο οποίος έφθασε στο σχετικό συμπέρασμα εξετάζοντας το σχήμα που θα έπαιρνε ένα υγρό περιστρεφόμενο γύρω από άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, κάτω από την επίδραση της φυγόκεντρης δύναμης και του ίδιου του βάρους. Πράγματι η γη συμπεριφέρεται ως ρευστό σε γεωλογική κλίμακα του χρόνου. Την ίδια εποχή οι ιταλικής καταγωγής αστρονόμοι της οικογένειας των Cassini (Jean-Dominique Cassini 1625-1712, και ο γιος του Jacques Cassini 1677-1756), που κυριαρχούσαν στην Γαλλική επιστημονική κοινότητα, έφθασαν, εξε-

τάζοντας αναξιόπιστα δεδομένα, στο αντίθετο συμπέρασμα, ότι δηλαδή η γη είναι εξογκωμένη στους πόλους (σχήμα 7).



**Σχήμα 7:** Η γη ως ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής πεπλατυσμένο στους πόλους (Newton) ή πεπλατυσμένο στον ισημερινό (Cassini)



**Σχήμα 8:**

Διαφορά μήκους τόξου ( $\Delta s_a > \Delta s_b$ ) για την ίδια διαφορά πλάτους  $\Delta\phi = 1^\circ$ , μεταξύ ισημερινού (ακτίνα  $a$ ) και πόλων (ακτίνα  $b$ )

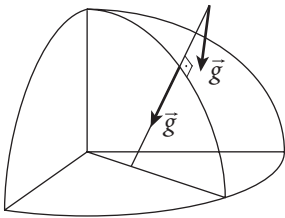
Για να θέσει τέλος στη διαμάχη, η Γαλλική Ακαδημία οργάνωσε δύο αποστολές για την μέτρηση του μήκους τόξου με μέγεθος μιας μοίρας στην κατεύθυνση βορρά-νότου: μία στην Λαπωνία το 1736-37 υπό τον Maupertuis (1698-1759) και μία στον ισημερινό, στο Quito του τότε Περού και σημερινού Εκουαντόρ, με κύριους ερευνητές τους La Condamine (1701-1774) και Bouguer (1698-1758), που διήρκεσε από το 1735 μέχρι το 1744. Επειδή η ακτίνα καμπυλότητας του μεσημβρινού είναι μεγαλύτερη στον ισημερινό από ότι στους πόλους, το αντίστοιχο μήκος τόξου μιας μοίρας θα είναι επίσης μεγαλύτερο στον ισημερινό (σχήμα 8). Τα αποτελέσματα δικαίωσαν πανηγυρικά τον Νεύτωνα. Με τα λόγια του Βολτέρου «οι Γάλλοι αστρονόμοι χρειάστηκε να ταξιδέψουν στις εσχατιές της γης για να μάθουν αυτό που ο κ. Νεύτων γνώριζε ήδη, χωρίς να εγκαταλείψει την άνεση του γραφείου του». Ένα περιοδικό της εποχής δημοσίευσε μια καρικατούρα του Maupertuis, ως Ηρακλή με το



*Pierre-Louis Moreau  
Maupertuis*

ρόπαλο στο ένα χέρι και την πεπλατυσμένη γη στο άλλο, ενώ ο Βολτέρος τον απεκάλεσε «πεπλατυνστή της γης και των Cassini».

Το ελλειψοειδές μοντέλο για το σχήμα της γης συνοδεύεται από ένα μοντέλο για το πεδίο βαρύτητας της γης, που είναι το άθροισμα της έλξης των γήινων μαζών και της φυγόκεντρης δύναμης, η οποία οφείλεται στην περιστροφή της γης. Υποτίθεται πλέον ότι η κατακόρυφη διεύθυνση είναι κάθετη στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς (σχήμα 9). Μία επιφάνεια η οποία είναι παντού κάθετη στην διεύθυνση του διανύσματος της βαρύτητας, ονομάζεται *ισοδυναμική επιφάνεια*. Αντιστοιχεί κατά κάποιο τρόπο σε μία στάθμη νερού σε ηρεμία, γιατί η καθετότητα δεν επιτρέπει στα μόρια του νερού να κυλήσουν σε μία πλάγια προς την επιφάνεια κατεύθυνση. Σε ένα τέτοιο μοντέλο υπάρχουν δύο ποιοτικές διαφορές, σε σχέση με το προηγούμενο σφαιρικό μοντέλο: Πρώτον, η καθετότητα της κατακόρυφης διεύθυνσης στο ελλειψοειδές, ισχύει μόνο για σημεία πάνω στο ελλειψοειδές και όχι σε σημεία έξω από αυτό. Δεύτερον, η βαρύτητα, το μέγεθος του διανύσματος της βαρύτητας, δεν είναι σταθερή πάνω στο ελλειψοειδές. Είναι μεγαλύτερη στους πόλους, όπου λόγω της πλάτυνσης βρισκόμαστε πλησιέστερα προς τις έλκουσες μάζες, από ότι στον ισημερινό.



**Σχήμα 9:**

*Το μαθηματικό μοντέλο για το πεδίο βαρύτητας της γης που συνοδεύει το ελλειψοειδές μοντέλο για το σχήμα της*



*Alexis-Claude Clairaut*

Το πρόβλημα της μαθηματικής περιγραφής ενός πεδίου βαρύτητας του οποίου μία ισοδυναμική επιφάνεια να είναι ελλειψοειδές εκ περιστροφής, ή γενικότερα του σχήματος ενός υγρού κάτω από την επίδραση της βαρύτητας, αποτέλεσε μία σημαντική πρόκληση για τους μαθηματικούς της εποχής. Το βιβλίο του Γάλλου μαθηματικού Clairaut (1713-1765) “Θεωρία του σχήματος της γης” υπήρξε ουσιαστικά το πρώτο σύγγραμμα “φυσικής γεωδαισίας” (αν και ο όρος γεωδαισία δεν εμφανίζεται πουθενά στο κείμενο!). Ο Clairaut συνέδεσε την μεταξύ πό-

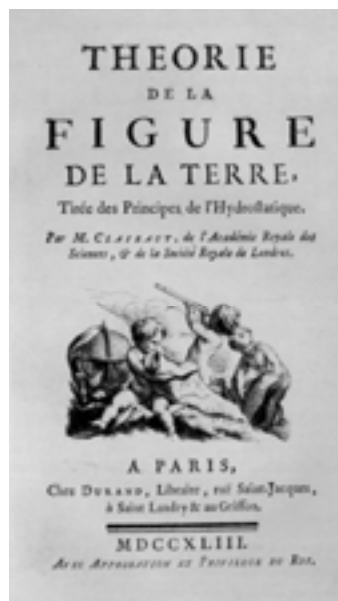
λων και ισημερινού ποσοστιαία μεταβολή της ακτίνας της γης (γεωμετρική πλά-

τυναση), με την αντίστοιχη ποσοστιαία μεταβολή της βαρύτητας (δυναμική πλάτυναση). Τελικά, οριστική λύση στο πρόβλημα έδωσαν οι Ιταλοί Somigliana και Pizzetti. Το πεδίο βαρύτητας των Somigliana-Pizzetti, χρησιμοποιείται, ακόμη και σήμερα, ως προσεγγιστικό πεδίο αναφοράς, για τον προσδιορισμό του περισσότερο πολύπλοκου πραγματικού πεδίου.

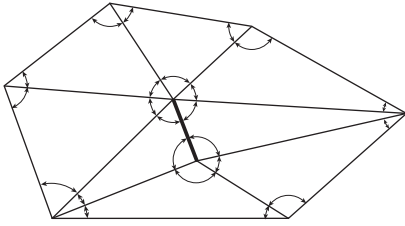
Στο ελλειψοειδές μοντέλο, το σφαιρικό πλάτος  $\varphi$  αντικαθίσταται από το γεωδαιτικό πλάτος  $\phi$ , που είναι το συμπλήρωμα της γωνίας  $90^\circ - \phi$ , την οποία σχηματίζει η κάθετη στο ελλειψοειδές με τον άξονα περιστροφής της γης. Παράλληλα, χρησιμοποιείται το γεωδαιτικό ύψος  $h$ , το οποίο είναι η (κατά μήκος της καθέτου) απόσταση οποιουδήποτε σημείου από το ελλειψοειδές, ενώ γεωδαιτικό και σφαιρικό πλάτος  $\lambda$  ταυτίζονται.

Ο προσδιορισμός της θέσης (του γεωδαιτικού μήκους και πλάτους) μπορεί θεωρητικά να γίνει για κάθε σημείο χωριστά, με αστρονομικές παρατηρήσεις που ήταν πλέον δυνατές με μεγαλύτερη ακρίβεια χάρις στα καλύτερα χρονόμετρα και την κατάρτιση αστρονομικών εφημερίδων, καταλόγων δηλαδή όπου δίνονται στοιχεία για τον υπολογισμό της ακριβούς θέσης κάθε σημαντικού ορατού άστρου, πάνω στον ουράνιο θόλο, όπως αυτός φαίνεται από τη γη, για κάθε ημερομηνία και ώρα. Όμως τα σφάλματα των οργάνων και του ελλειψοειδούς μοντέλου (η κατακόρυφη δεν είναι ακριβώς κάθετη στο ελλειψοειδές), δεν επιτρέπουν την επίτευξη της επιθυμητής ακρίβειας. Κάθε δευτερόλεπτο τόξου του σφάλματος στις γεωδαιτικές γωνιακές συντεταγμένες, αντιστοιχεί σε περίπου 30 μέτρα πάνω στην επιφάνεια της γης. Σφάλματα της τάξης των εκατοντάδων μέτρων είναι σχετικά μικρά, όταν αναφερόμαστε σε σημεία από τη μία άκρη στην άλλη της γης, αλλά είναι συντριπτικά μεγάλα, όταν αναφερόμαστε σε σημεία δεκάδες χιλιόμετρα μακριά. Στην τοπογραφία και τη γεωδαισία σημασία δεν έχει το απόλυτο σφάλμα στον προσδιορισμό θέσης, αλλά το σχετικό σφάλμα που μετριέται σε μέρη ανά εκατομμύριο ( $\text{ppm} = \text{parts per million}$ ).

Καλύτερη ακρίβεια προσφέρει η μέθοδος του τριγωνισμού (σχήμα 10) την οποία εισήγαγε ο Ολλανδός Snell ή Snellius, ο αυτοαποκαλούμενος Ερατοσθένης της



Εξώφυλλο του βιβλίου του Clairaut

**Σχήμα 10:**

Η μέθοδος του τριγωνισμού: Οι μετρήσεις γωνιών καθορίζουν το σχήμα κάθε τριγώνου και επομένως και του δικτύου ενώ η κλίμακα προσδιορίζεται μετρώντας το μήκος μιας τουλάχιστον πλευράς.

Μπατάβια, αρχικά για τοπογραφικές αποτυπώσεις σε μικρές αποστάσεις, όπου οι διευθύνσεις της κατακορύφου μπορούν να θεωρηθούν παράλληλες μεταξύ τους. Μετρώντας τις οριζόντιες γωνίες που σχηματίζει ένα σύνολο σημείων, το τριγωνομετρικό δίκτυο, προσδιορίζεται το σχήμα του δικτύου, στο οποίο δίνεται το σωστό μέγεθος, με τη μέτρηση μίας τουλάχιστον ή και περισσότερων πλευρών (σχήμα 10). Για τριγωνισμούς μεγαλύτερης έκτασης πρέπει να ληφθεί υπόψη, αρχικά, η σφαιρικότητα της γης και στη συνέχεια το ελλειψοειδές της σχήμα. Τα σχετικά τρίγωνα δεν είναι πλέον οριζόντια, αλλά σχηματίζονται πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς. Ο ρόλος των αστρονομικών παρατηρήσεων περιορίζεται, κατά κύριο λόγο, στην τοποθέτηση του τριγωνομετρικού δικτύου πάνω στο ελλειψοειδές, στη σωστή θέση και με τον σωστό προσανατολισμό. Επειδή εκ των πραγμάτων μπορεί να μετρηθεί το μήκος μόνο μικρότερων πλευρών, τα σφάλματα των μετρήσεων μήκους μεγεθύνονται στο σύνολο του δικτύου. Σε πολύ μεγαλύτερα τριγωνομετρικά δίκτυα, στο σφάλμα του μεγέθους (σφάλμα κλίμακας) πρέπει να προστεθεί και η αλλοίωση του σχήματος που οφείλεται στα σφάλματα των μετρήσεων των οριζοντίων γωνιών. Όταν λοιπόν το σχετικό σφάλμα (ppm) γίνεται σημαντικό, οι αστρονομικές παρατηρήσεις, περιορισμένες σε λίγα επιλεγμένα σημεία του τριγωνομετρικού δικτύου επειδή το κόστος τους είναι πολύ μεγάλο, όχι μόνο δίνουν στο τριγωνομετρικό δίκτυο τη σωστή θέση και προσανατολισμό, αλλά ταυτόχρονα βελτιώνουν το σχήμα και το μέγεθος του.

Άρρηκτα δεμένος με το ελλειψοειδές μοντέλο είναι ο διαχωρισμός του προβλήματος του προσδιορισμού θέσης, που από τη φύση του είναι τρισδιάστατο, σε ένα διδιάστατο (οριζόντια-ελλειψοειδής θέση) και ένα μονοδιάστατο μέρος (υψομετρία). Ο διαχωρισμός αυτός ταλάνισε τη γεωδαιτική πρακτική μέχρι την έλευση της διαστημικής της εποχής. Τα αίτια αυτού του διαχωρισμού δεν είναι μόνο πρακτικά, δηλαδή συνδεδεμένα με τη μεθοδολογία των γεωδαιτικών παρατηρήσεων, αλλά και φυσικά, συνδεδεμένα με τις ανάγκες των εφαρμογών, όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω. Οι θεοδόλιχοι δεν μετρούν μόνο οριζόντιες,

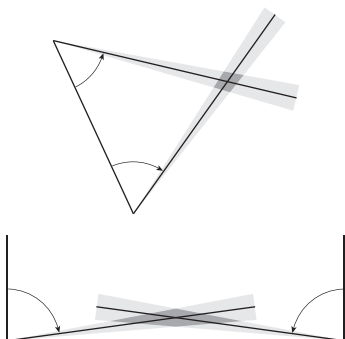


**Σχήμα 11:**

Ο Willebrord Snell ή Snellius και το πρώτο τριγωνομετρικό δίκτυο στην Ολλανδία

αλλά και κατακόρυφες γωνίες, από τις οποίες μπορεί να προσδιοριστεί, θεωρητικά, η τρίτη υψομετρική διάσταση. Κάτι τέτοιο είναι και πρακτικά εφαρμόσιμο σε μικρά δίκτυα, για τεχνικές ή βιομηχανικές εφαρμογές, που έχουν παρόμοια τάξη μεγέθους, τόσο κατά την οριζόντια όσο και κατά την κατακόρυφη διάσταση. Όμως στα τριγωνομετρικά δίκτυα με οριζόντιες αποστάσεις, μεταξύ γειτονικών σημείων, που φθάνουν τα 100 χιλιόμετρα, η αντίστοιχη υψομετρική διαφορά δεν ξεπερνά τα 2 χιλιόμετρα του υψόμετρου των εύκολα προσβάσιμων κορυφών των βουνών. Οι ακτίνες σκόπευσης τέμνονται κατά την οριζόντια κατεύθυνση με γωνίες πολύ διαφορετικές από  $180^\circ$ , πράγμα που επιτρέπει τον προσδιορισμό της τομής τους με μικρή επίδραση των αναπόφευκτων σφαλμάτων στις μετρήσεις (σχήμα 12). Η γωνία τομής όμως κατά την κατακόρυφη διεύθυνση είναι κοντά στις  $180^\circ$ , έτσι ώστε η θέση της τομής τους να επηρεάζεται κατά πολύ από τα σφάλματα κατά την οριζόντια μόνο διεύθυνση. Έτσι οι μετρήσεις κατακόρυφων γωνιών δεν συμβάλουν στην επίτευξη ακρίβειας κατά

**Σχήμα 12:**



Επίδραση των σφαλμάτων των γωνιών στην θέση σημείων που σκοπεύεται από δύο άλλα. Οι σκιασμένες περιοχές αντιστοιχούν στα πιθανά σφάλματα των γωνιών.

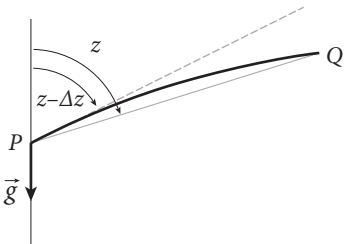
**Επάνω:** Οριζόντιες γωνίες σκόπευσης με μικρή περιοχή αβεβαιότητας θέσης.

**Κάτω:** Ζενίθειες γωνίες σκόπευσης με μεγάλη περιοχή αβεβαιότητας κατά την οριζόντια θέση επειδή οι ακτίνες σκόπευσης τέμνονται με γωνία κοντά στις  $180^\circ$ .



την οριζόντια έννοια, φαινομενικά όμως, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό υψομετρικών διαφορών.

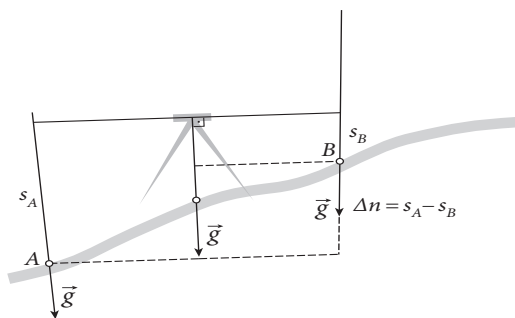
Το πρόβλημα όμως είναι ότι, ενώ οι κατακόρυφες γωνίες μπορούν να μετρηθούν με την ίδια ακρίβεια όπως και οι οριζόντιες, οι τιμές που προκύπτουν διαφέρουν σημαντικά από τις πραγματικές τιμές εξαιτίας δύο σημαντικών εξωτερικών «συστηματικών» επιδράσεων. Η πρώτη επίδραση είναι αυτή της διάθλασης της ατμόσφαιρας, εξαιτίας της οποίας η ακτίνες του φωτός, από το στόχο προς το όργανο σκόπευσης, δεν ακολουθούν ευθεία αλλά καμπύλη διαδρομή (σχήμα 13) με αποτέλεσμα να προκύπτουν συστηματικά μεγαλύτερες κατακόρυφες γωνίες. Η δεύτερη επίδραση οφείλεται στην απόκλιση της κατακορύφου από την κάθετο στο ελλειψοειδές. Η επίδραση της απόκλισης αυτής είναι σχετικά μικρή πάνω στις μετρήσεις των οριζόντιων γωνιών (ανάλογη ή μικρότερη από το σφάλμα στην οριζόντιωση του οργάνου) αλλά σημαντική πάνω στις κατακόρυφες γωνίες, όπου η γωνία απόκλισης μπορεί ακόμη και να προστεθεί ολόκληρη στην μετρημένη κατακόρυφη γωνία, όταν οι διευθύνσεις της απόκλισης και της σκόπευσης συμπίπτουν.



**Σχήμα 13:**

*Επίδραση της ατμοσφαιρικής διάθλασης στη μέτρηση ζενίθειων γωνιών. Λόγω της διάθλασης το φως από το στόχο Q ακολουθεί καμπύλη τροχιά προς το σημείο P, με αποτέλεσμα αντί της πραγματικής γωνίας  $z$  να φαίνεται ψηλότερα, στην κατεύθυνση της γωνίας  $z - \Delta z$ .*

Για τους λόγους αυτούς ο προσδιορισμός των υψομετρικών διαφορών γινόταν με εντελώς ανεξάρτητες παρατηρήσεις. Μέσα από μία διαδικασία που ονομάζεται χωροστάθμηση, όπου δύο τριγωνομετρικά σημεία συνδέονται με μία σειρά, αμοιβαία ορατών, κοντινών σημείων (χωροσταθμική όδευση). Για κάθε ζεύγος διαδοχικών σημείων, είναι δυνατή η μέτρηση της υψομετρικής διαφοράς με έμμεσες μετρήσεις κατακόρυφων γωνιών ίσες με  $90^\circ$ , επειδή η επίδραση της ατμοσφαιρικής διάθλασης είναι αμελητέα για κοντινές αποστάσεις, ενώ η επίδραση της απόκλισης της κατακορύφου αλληλοαναιρείται, καθώς είναι ουσιαστικά η ίδια σε γειτονικά σημεία. Τοποθετώντας έναν χωροβάτη σε ένα σημείο η σκόπευση, με σταθερή ζενίθεια γωνία  $90^\circ$ , ενός άλλου σημείου-στόχου όπου τοποθετείται κατακόρυφη σταδία (σχήμα 14), δίνει την ανάγνωση του ύψους σκόπευσης  $s$ . Σκοπεύοντας προς δύο σημεία η «υψομετρική διαφορά» προκύπτει



Σχήμα 14:

Χωροστάθμιση με την μέτρηση υψομετρικών διαφορών  $\Delta n = s_B - s_A$  από τις αναγνώσεις  $s_A, s_B$  από χωροβάτη σε σταδίες-στόχους σε δύο σημεία  $A, B$ . Οι διαφορές αυτές αναφέρονται σε διαφορετικές κατακόρυφες διευθύνσεις και δεν μπορούν να άθροιστούν παρά μόνο προσεγγιστικά.

από τη διαφορά των σκοπεύσεων  $\Delta n = s_A - s_B$ , (ακριβέστερη περιγραφή και περισσότερες λεπτομέρειες στο κεφ. 5.9). Η συνολική υψομετρική διαφορά μεταξύ των τριγωνομετρικών σημείων προκύπτει προσεγγιστικά από το άθροισμα των υψομετρικών διαφορών της πλευράς της όδευσης. Η άθροιση όμως αυτή στερείται φυσικού νοήματος, επειδή οι προσθετέοι αναφέρονται σε διαφορετική ο καθένας διεύθυνση «ύψους» και όχι σε μία κοινή, όπως π.χ. η κάθετη στο ελλειψοειδές αναφοράς.

Για να περάσουμε από το ελλειψοειδές σε ένα αρτιότερο μοντέλο για το σχήμα και το πεδίο βαρύτητας της γης, χρειάστηκε η ανάπτυξη ακριβέστερων μεθόδων παρατηρήσεων, με την τεχνική βελτίωση των σχετικών οργάνων, αλλά και η ανάπτυξη εκλεπτυσμένων μεθόδων για την μαθηματική ανάλυση των δεδομένων των παρατηρήσεων. Σημαντική καμπή στην μεθοδολογία της ανάλυσης δεδομένων υπήρξε η εισαγωγή της περίφημης «μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων», πρώτα από τον Gauss (1777-1855) και ανεξάρτητα από τον Γάλλο μαθηματικό Legendre (1752-1833), ο οποίος και την δημοσίευσε πρώτος. Ο Gauss (σχήμα 15) είναι σήμερα περισσότερο γνωστός ως μαθηματικός (ονομάστηκε από τους συγχρόνους του «πρίγκιπας» των μαθηματικών - υπονοώντας προφανώς ότι ο βασιλικός τίτλος ανήκει στον Ευκλείδη), αλλά υπήρξε παράλληλα άνθρωπος της δράσης, αστρονόμος και τοπογράφος-γεωδαίτης. Ασχολήθηκε μάλιστα, εκτεταμένα, με μετρήσεις τοπογραφικών δικτύων (σχήμα 16), ελπίζοντας (χωρίς ρεαλιστική βάση λόγω της χαμηλής ακρίβειας των μετρήσεων) να διαπιστώσει αν ισχύει η Ευκλείδεια γεωμετρία, σύμφωνα με την οποία το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι  $180^\circ$ . Σε μια εποχή όπου οι μαθηματικοί

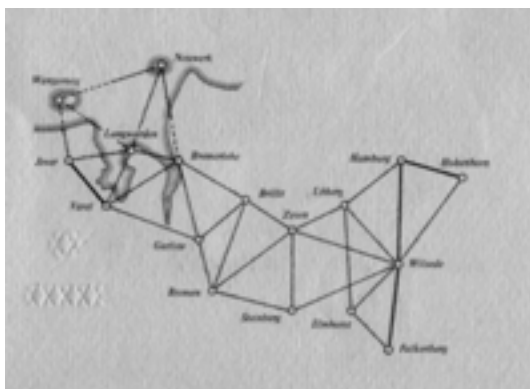


Adrien Marie Legendre



**Σχήμα 15:**

Ο Carl Friedrich Gauss σε γερμανικό χαρτονόμισμα των 10 μάρκων



**Σχήμα 16:**

Ένα από τα τριγωνομετρικά δίκτυα του Gauss από την πίσω πλευρά του γερμανικού χαρτονομίσματος των 10 μάρκων

ασχολούνταν με ρεαλιστικά προβλήματα, αναγκασμένοι να αναπτύξουν μόνοι τους τις απαραίτητες μαθηματικές μεθόδους, ο Gauss, μελετώντας μεταξύ άλλων τους τρόπους απεικόνισης της σφαίρας ή του ελλειψοειδούς στο επίπεδο (τις χαρτογραφικές προβολές) εισήγαγε έναν ολόκληρο νέο κλάδο μαθηματικών, την διαφορική γεωμετρία.

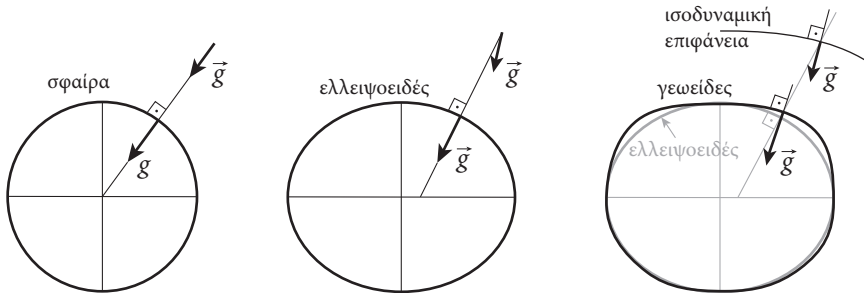
Για την ανάλυση αστρονομικών και γεωδαιτικών παρατηρήσεων εισήγαγε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, η οποία είναι, με δυο λόγια, η εξής: διαθέτοντας παρατηρήσεις μεγεθών, τα οποία συνδέονται με ορισμένες άγνωστες παραμέτρους τις οποίες επιθυμούμε να προσδιορίσουμε (π.χ. τις οριζόντιες συντεταγμένες των κορυφών των δικτύων), είναι αδύνατον, εξαιτίας των σφαλμάτων των μετρήσεων, να επιλέξουμε τιμές των αγνώστων, οι οποίες να αναπαράγουν για τα παρατηρούμενα μεγέθη τις παρατηρούμενες τιμές. Επειδή τα σφάλματα των παρατηρήσεων είναι μικρά κατά απόλυτη τιμή, μία λύση είναι να δώσουμε στους αγνώστους τιμές τέτοιες, ώστε οι διαφορές (σφάλματα), ανάμεσα στις υπολογισμένες τιμές των παρατηρούμενων μεγεθών και τις αντίστοιχες

παρατηρημένες (μετρημένες) τιμές, να είναι επίσης μικρές σε απόλυτη τιμή και συγκεκριμένα τέτοιες, ώστε, να ελαχιστοποιείται το άθροισμα των ελαχίστων τετραγώνων των σφαλμάτων. Η μέθοδος αυτή, αν και ιδιαίτερα αποτελεσματική στην πράξη, στερούνταν λογικής θεμελίωσης. Γιατί π.χ. να χρησιμοποιηθεί το άθροισμα των τετραγώνων και όχι των απόλυτων τιμών, ή μια εντελώς διαφορετική αρχή, όπως η ελαχιστοποίηση του μεγαλύτερου σφάλματος; Η θεμελίωση ήρθε, χάρις στην ανάπτυξη της θεωρίας των πιθανοτήτων από το μεγαλύτερο Γάλλο μαθηματικό της εποχής, τον Laplace (1749-1827). Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων δίνει, κατά κάποιο συγκεκριμένο τρόπο, τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια για τις υπολογισμένες τιμές των αγνώστων παραμέτρων. Το αποτέλεσμα αυτό, που οφείλεται στον Gauss και στις πρόσθετες μελέτες του Ρώσου μαθηματικού Μαρκον, είναι σήμερα γνωστό στην μαθηματική στατιστική ως θεώρημα των Gauss-Markov. Από τον Gauss μέχρι σήμερα, η γεωδαιτική επιστημονική κοινότητα βρίσκεται στην πρωτοπορία της ανάπτυξης των μεθόδων ανάλυσης δεδομένων, χρησιμοποιώντας προηγμένες μαθηματικές και στατιστικές τεχνικές.



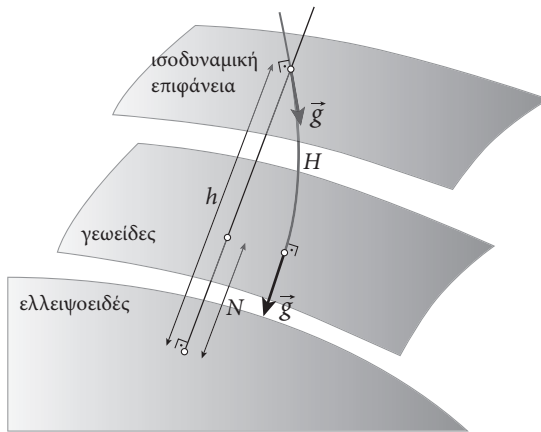
*Pierre-Simon Laplace*

Με την βελτίωση λοιπόν της ποιότητας των παρατηρήσεων, έγινε αντιληπτό ότι η διεύθυνση της κατακόρυφου αποκλίνει σημαντικά από την κάθετο στο ελλειψοειδές, και το πεδίο βαρύτητας, αντίστοιχα, δεν είναι τόσο απλό, ώστε μία ισοδυναμική του επιφάνεια να έχει το σχήμα ελλειψοειδούς εκ περιστροφής. Το νέο μοντέλο για το σχήμα της γης είναι πλέον απελευθερωμένο από τον περιορισμό της αναζήτησης ενός, ιδανικού μαθηματικά, απλού σχήματος: είναι απλά η ισοδυναμική επιφάνεια που αντιστοιχεί στη μέση στάθμη της θάλασσας για την οποία εισάγεται ένας νέος όρος, το *γεωειδές*. Η κατεύθυνση της κατακόρυφου είναι κάθετη εξ ορισμού στο γεωειδές για σημεία πάνω στο γεωειδές, ενώ για κάθε άλλο σημείο είναι κάθετη στην ισοδυναμική επιφάνεια που διέρχεται από αυτό (σχήμα 17). Η κατακόρυφη διεύθυνση περιγράφεται από δύο γωνίες, το αστρονομικό μήκος  $\Lambda$  και το αστρονομικό πλάτος  $\Phi$ , οι οποίες δεν ταυτίζονται με τις αντίστοιχες γεωδαιτικές συντεταγμένες  $\lambda$  και  $\phi$ , οι οποίες αναφέρονται, όχι στην κατακόρυφη, αλλά στην κάθετη προς το ελλειψοειδές διεύθυνση. Αν φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη κατακόρυφο, που να διέρχεται από το κέντρο του ελλειψοειδούς, αυτή σχηματίζει γωνία  $90^\circ - \Phi$  με τον άξονα περιστροφής, ενώ το επίπεδο, που ορίζεται από την παράλληλο αυτή



Σχήμα 17: Εξέλιξη των μοντέλων για το σχήμα και το πεδίο βαρύτητας της γης

και τον άξονα περιστροφής, σχηματίζει διέδρη γωνία  $\Lambda$  με το μεσημβρινό επίπεδο του Greenwich (επίπεδο άξονα περιστροφής και Greenwich). Η τρίτη συντεταγμένη, το *ορθομετρικό ύψος*  $H$ , μετριέται, όχι πάνω από το ελλειψοειδές και κατά μήκος της κάθετης σε αυτό – όπως συμβαίνει για το γεωδαιτικό ύψος  $h$  – αλλά πάνω από το γεωειδές και κατά μήκος της καμπύλης κατακόρυφης γραμμής που διέρχεται από το σημείο, η οποία ορίζεται από την ιδιότητα να έχει εφαπτόμενη σε κάθε σημείο της, την τοπική διεύθυνση της κατακόρυφου (σχήμα 18). Το νέο μοντέλο δεν προσφέρεται για μαθηματικούς υπολογισμούς, ακόμα και αν υποθεθεί ότι το πεδίο βαρύτητας είναι τέλεια γνωστό, έτσι ώστε να μπορεί να προσδιοριστεί το σχήμα του γεωειδούς, η διεύθυνση της κατάκορυφου σε κάθε σημείο παρατήρησης και το σχήμα της καμπύλης κατακόρυφης γραμμής που διέρχεται από αυτό. Παράλληλα, δεν εκλείπουν οι λόγοι για τον διαχωρισμό του προσδιορισμού θέσης σε οριζόντιο και υψομετρικό μέρος. Έτσι το ελλειψοειδές εκ περιστροφής (που η διαφορά του από το γεωειδές είναι πολύ μικρή, δεν ξεπερνά τα 100 μέτρα, μόλις 1% της διαφοράς 10 περίπου χιλιομέτρων μεταξύ ισημερινής και πολικής ακτίνας) παραμένει, όχι όμως σαν μοντέλο του πραγματικού σχήματος της γης, αλλά ως «ελλειψοειδές» αναφοράς. Το πεδίο βαρύτητας, με ισοδυναμική επιφάνεια το ελλειψοειδές δεν είναι πλέον μοντέλο του πραγματικού πεδίου, αλλά ένα προσεγγιστικό πεδίο αναφοράς, ή *κανονικό πεδίο*, όπως επικράτησε να λέγεται. Οι παρατηρήσεις οριζοντίων γωνιών πρέπει να αναχθούν από την κατακόρυφο στην κάθετη στο ελλειψοειδές αναφοράς και, στη συνέχεια, από το πραγματικό σημείο στην κάθετη προβολή του πάνω στο ελλειψοειδές. Η ανάλυση τριγωνομετρικών δικτύων πάνω στο ελλειψοειδές, τα οποία αποτελούνται από τις προβολές των πραγματικών σημείων, συνιστά την «ελλειψοειδή» ή «γεωμετρική γεωδαισία», σε αντιδιαστολή με την «φυσική γεωδαισία», η οποία ασχολείται με τον προσδιορισμό του πεδίου

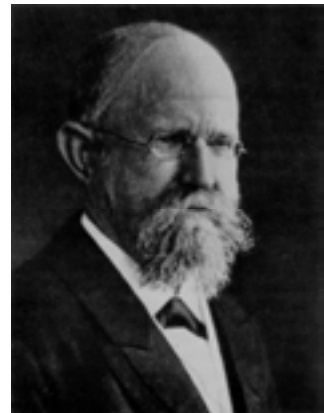


Σχήμα 18:

Η κατακόρυφη καμπύλη και το ορθομετρικό ύψος  $H$

βαρύτητας, ώστε να μπορούν να γίνουν οι σχετικές αναγωγές. Παράλληλα, επειδή η κατακόρυφη καμπύλη έχει μικρή καμπυλότητα, ταυτίζεται πρακτικά με την κάθετη στο ελλειψοειδές και η διαφορά  $N = h - H$ , μεταξύ γεωδαιτικού και ορθομετρικού ύψους, είναι ουσιαστικά το (γεωδαιτικό) ύψος του γεωειδούς (σχήμα 18).

Ο προσδιορισμός του πεδίου βαρύτητας γίνεται πλέον τόσο επιτακτικός, ώστε να ενταχθεί πλέον στο αντικείμενο της γεωδαισίας ως επιστήμης. Ο σημαντικότερος Γερμανός γεωδαίτης F.R. Helmert (1843-1917), ορίζει πλέον, σε σχετικό σύγγραμμα του, τη γεωδαισία ως την επιστήμη του “προσδιορισμού του σχήματος και του πεδίου βαρύτητας της γης”. Στην πραγματικότητα, για την επίλυση των τριγωνομετρικών δικτύων, δεν χρειάζεται η πλήρης γνώση του πεδίου βαρύτητας, αλλά μόνο η γνώση της απόκλισης της κατακορύφου και του ύψους του γεωειδούς στα τριγωνομετρικά σημεία. Η διεύθυνση της κατακορύφου μπορεί να προσδιοριστεί με αστρονομικές παρατηρήσεις των  $\Lambda$  και  $\Phi$ , οι οποίες είναι πάντως ιδιαίτερα υψηλού κόστους, οπότε παραμένει το πρόβλημα του προσδιορισμού του ύψους του γεωειδούς.



Friedrich Robert Helmert

Τη σημαντική καινοτομία στην κατεύθυνση αυτή δίνει η δυνατότητα προσδιορισμού του ύψους του γεωειδούς  $N$ , από παρατηρήσεις της βαρύτητας  $g = |\vec{g}|$ ,



George Gabriel Stokes

του μέτρου του διανύσματος της βαρύτητας  $\vec{g}$ , θεωρητικά στο σύνολο της επιφάνεια της γης και πρακτικά σε μία εκτεταμένη περιοχή γύρω από το σημείο που μας ενδιαφέρει. Ο Άγγλος μαθηματικός G.G. Stokes (1819-1903), δίνει τον (γνωστό πλέον με το όνομά του) μαθηματικό τύπο, για τον υπολογισμό του  $N$  από την ολοκλήρωση πάνω στην επιφάνεια της γης των ανωμαλιών βαρύτητας  $\Delta g(Q) = g(Q) - \gamma(Q_0)$ , των διαφορών δηλαδή ανάμεσα στην βαρύτητα  $g$  στο σημείο  $Q$  πάνω στο γεωειδές, και την κανονική βαρύτητα  $\gamma$  (βαρύτητα αναφοράς του κανονικού πεδίου) στην προβολή

$Q_0$  του  $Q$  πάνω στο ελλειψοειδές. Ο τύπος του Stokes είναι

$$N(P) = \frac{R}{4\pi G} \int S(P, Q) \Delta g(Q) d\sigma_Q, \quad (1)$$

όπου  $G$  είναι η παγκόσμια σταθερά έλξης,  $S(P, Q) = S(\psi)$  είναι μία γνωστή συνάρτηση (συνάρτηση του Stokes) που εξαρτάται μόνο από τη γωνία  $\psi = \widehat{POQ}$  με κορυφή  $O$  το κέντρο του ελλειψοειδούς, ενώ η ολοκλήρωση γίνεται πάνω σε μία σφαίρα  $\sigma$  με ακτίνα  $R$  που προσεγγίζει το γεωειδές. Αργότερα ο τύπος του Stokes θα επεκταθεί στον τύπο του Vening Meinesz για τον υπολογισμό και των αποκλίσεων της κατακορύφου από μετρήσεις της βαρύτητας

$$\xi \equiv \Phi - \varphi = \frac{1}{4\pi G} \int \frac{dS}{d\psi} \cos \alpha \Delta g d\sigma, \quad (2)$$

$$\eta \equiv \cos \varphi (\Lambda - \lambda) = \frac{1}{4\pi G} \int \frac{dS}{d\psi} \sin \alpha \Delta g d\sigma, \quad (3)$$

όπου  $\alpha$  είναι το αζιμούθιο από το σημείο  $P$  προς το σημείο  $Q$ .

Η ανάγκη για σύνδεση των ανεξάρτητων εθνικών τριγωνομετρικών δικτύων και για γνώση της βαρύτητας και σε γειτονικές περιοχές, οδήγησε σε διακρατική συνεργασία, πρώτα στην Ευρώπη και αργότερα σε όλο τον κόσμο, με αποτέλεσμα την ίδρυση της πρώτης διεθνούς επιστημονικής ένωσης, της οποίας μάλιστα τα μέλη δεν είναι μεμονωμένοι επιστήμονες, αλλά κράτη, μέσω των εθνικών

τους γεωδαιτικών επιτροπών. Σήμερα η ένωση αυτή ονομάζεται *Διεθνής Γεωδαιτική Ένωση* (IAG = International Association of Geodesy) και απαρτίζει, μαζί με άλλες συγγενικές επιστημονικές ενώσεις από το χώρο της γεωφυσικής, τη *Διεθνή Ένωση Γεωδαισίας και Γεωφυσικής* (IUGG = International Union of Geodesy and Geophysics). Μέσω των “Επιτροπών” της και των οργανωμένων “Υπηρεσιών” της, συντονίζει τη διεθνή γεωδαιτική έρευνα και προσφέρει σχετικές υπηρεσίες στη διεθνή επιστημονική κοινότητα. Για μερικές εφαρμογές που σχετίζονται με την περιστροφή της γης, τα συστήματα αναφοράς και τον χρόνο, έχει οργανώσει συγκεκριμένες “Υπηρεσίες”, από κοινού με την *Διεθνή Αστρονομική Ένωση* (IAU = International Association of Geodesy). Ας σημειωθεί, με την ευκαιρία, ότι κάτι παρόμοιο ισχύει και για την τοπογραφία, όπου τα μέλη της *Διεθνούς Ομοσπονδίας Τοπογράφων* (FIG = Fédération Internationale des Géomètres) είναι οι διάφορες εθνικές επαγγελματικές ενώσεις των επιμέρους χωρών.

Επιστρέφοντας στο θέμα του προσδιορισμού της θέσης με τη βοήθεια συστημάτων αναφοράς, η μελέτη του πεδίου βαρύτητας έδωσε (θεωρητικά τουλάχιστον) τη δυνατότητα τοποθέτησης της αρχής του συστήματος, του κέντρου δηλαδή του ελλειψοειδούς αναφοράς, σε ένα «φυσικά» ορισμένο σημείο, το κέντρο μάζας της γης ή *γεώκεντρο*. Ο άξονας περιστροφής ήταν η επόμενη «φυσική» συνιστώσα του συστήματος αναφοράς, ενώ η μόνη αυθαίρετη συμβατική συνιστώσα ήταν η επιλογή ενός συγκεκριμένου τριγωνομετρικού σημείου, στο αστροσκοπείο του Greenwich, για τον ορισμό της αρχής μέτρησης των γεωδαιτικών μηκών. Όμως, με την συνεχή βελτίωση της ακρίβειας των αστρονομικών παρατηρήσεων, έγινε τελικά αντιληπτό ότι ο άξονας περιστροφής δεν παραμένει σταθερός σε σχέση με τη γη, αλλά μεταβάλλει τη θέση του κατά τρόπο ακανόνιστο, κατά  $\pm 6$  μέτρα περίπου (φαινόμενο κίνησης του πόλου). Έτσι, ο άξονας του παγκόσμιου ελλειψοειδούς αναφοράς έπρεπε να μετακινηθεί σε μία σταθερή θέση, που αντιστοιχούσε σε μία μέση θέση του άξονα περιστροφής. Για τη μελέτη του φαινομένου της κίνησης του πόλου και τον ορισμό του σχετικού άξονα του συστήματος αναφοράς με συμβατικό πλέον τρόπο, IAU και IAG οργάνωσαν τη *Διεθνή Υπηρεσία Πλάτους* (International Latitude Service), η οποία μετεξελίχθηκε στη *Διεθνή Υπηρεσία Κίνησης του Πόλου* (International Polar Motion Service).



## 1.6 Η γεωδαισία στην διαστημική εποχή

Για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, μεγαλύτερο από το πρώτο μισό του 20<sup>ου</sup> αιώνα, ο κύριος στόχος της γεωδαιτικής πρακτικής ήταν η κάλυψη της επιφάνειας της γης με πυκνές μετρήσεις βαρύτητας, τόσο στη στεριά, όσο και στη θάλασσα, όπου οι μετρήσεις είναι ιδιαίτερα δύσκολες. Ο προσδιορισμός του πεδίου βαρύτητας, και ιδιαίτερα των αποκλίσεων της κατακορύφου, υπήρξε θέμα υψηλής προτεραιότητας στη γεωδαιτική έρευνα, ενώ το παγκόσμιο κέντρο της γεωδαισίας ήταν το Φιλανδικό Γεωδαιτικό Ινστιτούτο, με πρωτοποριακές σχετικές έρευνες και δημοσιεύσεις. Οι καθηγητές έστρεφαν σε αυτή την κατεύθυνση τους νέους αξιόλογους γεωδαίτες που ήθελαν να εκπονήσουν τη διδακτορική τους διατριβή. Όμως η ιστορία της επιστήμης δεν γράφεται με προδιαγραφές αλλά με ανατροπές. Στις 4 Οκτωβρίου του 1957, η ανθρωπότητα περνά το κατώφλι της διαστημικής εποχής, με την εκτόξευση από την τότε Σοβιετική Ένωση του Σπούτνικ, του πρώτου τεχνητού δορυφόρου της γης. Οι πλέον οξυδερκείς γεωδαίτες στρέφουν τα μάτια τους στο διάστημα αναζητώντας ένα πέρασμα από τις «δύο συν μία» διαστάσεις (οριζοντιογραφία-υψομετρία) στις τρεις ενιαίες διαστάσεις του φυσικού χώρου. Στο τμήμα Γεωδαιτικών Επιστημών του Πολιτειακού Πανεπιστημίου του Οχάιο, που είχε πρόσφατα ιδρυθεί από τον Φιλανδό W. Heiskanen, τρεις νέοι επιστήμονες, οι W. Kaula, I. Mueller και Γ. Βέης, επιλέγουν θέματα διδακτορικών διατριβών πάνω στις εφαρμογές των τεχνητών δορυφόρων και γράφουν ιστορία. Το τμήμα θα γίνει σύντομα η Μέκκα της γεωδαισίας και το παράδειγμα του θα ακολουθήσουν πανεπιστημιακά τμήματα και ερευνητικά ινστιτούτα σε όλο τον κόσμο.

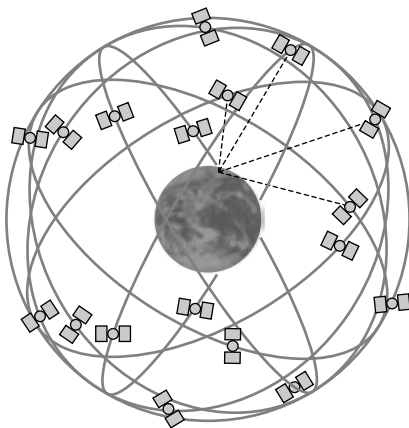
Με τις παρατηρήσεις δορυφόρων προκύπτουν τα πρώτα παγκόσμια τριγωνομετρικά δίκτυα, στα οποία είναι έμμεσα παρούσα η σημαντική τρίτη κατά ύψος διάσταση. Οι θέσεις των δορυφόρων, κατά τη στιγμή της κάθε παρατήρησης, χρησιμεύουν ως «απρόσιτα» τριγωνομετρικά σημεία, δηλαδή σημεία προς τα οποία εκτελούνται παρατηρήσεις, χωρίς όμως να εκτελούνται παρατηρήσεις από αυτά. Παράλληλα η ανάλυση των τροχιών, που διαγράφουν οι δορυφόροι κάτω από την επίδραση της έλξης της γης, οδηγεί σε, ανεξάρτητο από επίγειες παρατηρήσεις, προσδιορισμό του πεδίου βαρύτητας της γης.

Αρχίζει τότε μια συνεχής εξέλιξη στις μεθόδους παρατηρήσεων των δορυφόρων, η οποία συνοδεύεται από μία εντυπωσιακή βελτίωση των ακριβειών που επιτυγχάνονται για τις συντεταγμένες. Οι πρώτες παρατηρήσεις έχουν γωνιακό χαρακτήρα και εκτελούνται με τη βοήθεια ειδικών φωτογραφικών μηχανών. Ακο-

λουθούν μετρήσεις αποστάσεων με ηλεκτρομαγνητικά κύματα και με ακτίνες Laser, μετρήσεις του ρυθμού μεταβολής της απόστασης με βάση το φαινόμενο Doppler, και τελικά μετρήσεις διαφορών φάσεων, όπου η μετρημένη ποσότητα είναι το υπόλοιπο που απομένει, όταν από την απόσταση του δορυφόρου αφαιρεθεί ο μεγαλύτερος δυνατός ακέραιος αριθμός αποστάσεων, ίσων με το χρησιμοποιούμενο μήκος κύματος. Παράλληλα αναπτύσσονται και μέθοδοι μετρήσεων της διαστημικής τεχνολογίας που δεν χρησιμοποιούν δορυφόρους: μετρήσεις αποστάσεων από τη γη σε σημεία της σελήνης, όπου έχουν τοποθετηθεί ανακλαστήρες με ακτίνες Laser, καθώς και η ακριβέστερη και πλέον αξιόπιστη όλων των μεθόδων, η *Συμβολομετρία Πολύ Μεγάλης Βάσης* (VLBI = Very Long Baseline Interferometry). Στο VLBI, παρατηρούνται με κεραίες τα ραδιοκύματα που προέρχονται από εξωγαλαξιακές ραδιοπηγές, τα λεγόμενα quasar. Όταν δύο σταθμοί παρατηρούν ταυτόχρονα την ίδια ραδιοπηγή, η ποσότητα που παρατηρείται είναι η προβολή της ευθύγραμμης βάσης που ενώνει δύο σταθμούς, πάνω στην κατεύθυνση της ραδιοπηγής.

Οι ακρίβειες στον προσδιορισμό των συντεταγμένων με διαστημικές μεθόδους, ξεκινούν από τα 20 μέτρα, για τα παγκόσμια δίκτυα με φωτογραφικές μηχανές, και σταδιακά φθάνουν στο 1 μέτρο, τα 10 εκατοστά και τελικά σήμερα στο 1 εκατοστό για αποστάσεις της τάξης της ακτίνας της γης.

Αποκορύφωμα της διαστημικής τεχνολογίας αποτελεί το ευρύτατης χρήσης *Παγκόσμιο Σύστημα Προσδιορισμού Θέσης* (GPS = Global Positioning System). Ένα σύνολο δορυφόρων (σχήμα 19) έχει τεθεί σε τροχιά γύρω από τη γη, έτσι ώστε, τουλάχιστον 4 από αυτούς, να είναι ορατοί ανά πάσα στιγμή σε κάθε σημείο της γης. Σήμερα υπάρχουν 28 δορυφόροι σε ύψος 20000 χιλιομέτρων



**Σχήμα 19:**

Ο «αστερισμός» των δορυφόρων του παγκοσμίου συστήματος εντοπισμού θέσης GPS

περίπου, οι οποίοι εκτελούν δύο περίπου περιστροφές γύρω από τη γη ανά 24ωρο. Με τη βοήθεια παρατηρήσεων από σταθμούς ελέγχου με γνωστή θέση, είναι δυνατός ο προσδιορισμός της θέσης κάθε δορυφόρου σε κάθε χρονική στιγμή. Το σύστημα εγκαταστάθηκε αρχικά για σκοπούς πλοήγησης, με στόχο ακρίβεια της τάξης των 10 μέτρων το πολύ, με βάση τις παρατηρήσεις ψευδοαποστάσεων. Ένας δέκτης GPS συγκρίνει το σήμα από κάθε δορυφόρο με αντίγραφο του, το οποίο παράγει ο ίδιος, και προσδιορίζει τον χρόνο που χρειάστηκε για να φθάσει το σήμα από το δορυφόρο στο δέκτη. Πολλαπλασιάζοντας με την ταχύτητα του φωτός, προκύπτει η απόσταση δορυφόρου-δέκτη, η οποία ονομάζεται «ψευδοαπόσταση» επειδή είναι επηρεασμένη από το σφάλμα του ρολογιού του δέκτη. Μετρώντας 4 ψευδοαποστάσεις ισάριθμων δορυφόρων με γνωστή θέση, μπορούν να προσδιοριστούν 4 άγνωστοι: οι 3 καρτεσιανές συντεταγμένες του δέκτη και το σφάλμα του ρολογιού .

Αντικαθιστώντας την παρατήρηση ψευδοαπόστασης με την παρατήρηση της διαφοράς φάσης, ανάμεσα στο δορυφορικό σήμα και το αντίγραφο του στο δέκτη, περνάμε από την πλοήγηση στο γεωδαιτικό GPS, με ακρίβεια της τάξης του ενός εκατοστού του μέτρου. Για να εξυπηρετηθούν οι σχετικές ανάγκες, η Διεθνής Γεωδαιτική Ένωση ίδρυσε την Διεθνή Υπηρεσία GPS (IGS = International GPS Service), η οποία συντονίζει το έργο επιμέρους κέντρων ανάλυσης δεδομένων από μόνιμα εγκαταστημένους δείκτες σε όλη τη γη, και παρέχει στοιχεία για τον υπολογισμό της θέσης των δορυφόρων με πολύ μεγάλη ακρίβεια.

Από την ανάλυση των παρατηρήσεων τις διαστημικής τεχνολογίας προκύπτουν απευθείας οι καρτεσιανές συντεταγμένες  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , του επίγειου σημείου παρατήρησης, ως προς ένα αυθαίρετα επιλεγμένο συμβατικό σύστημα αναφοράς με τρεις ορθογώνιους άξονες  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , με αρχή  $O$  κάπου κοντά στο γεώκεντρο, άξονα  $Oz$  κάπου κοντά στη μέση θέση του άξονα περιστροφής και επίπεδο  $(Ox, Oz)$  κάπου κοντά στο αστεροσκοπείο του Greenwich. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες μπορούν εύκολα να μετατραπούν σε γεωδαιτικές, χωρίς την αναχρονιστική πλέον ανάγκη για γνώση των αποκλίσεων της κατακορύφου. Οι αστρονομικές παρατηρήσεις εγκαταλείπονται πρώτες, ενώ θα ακολουθήσουν οι παρατηρήσεις σε τριγωνομετρικά δίκτυα με θεοδόλιχους και ηλεκτρομαγνητικά όργανα μέτρησης αποστάσεων. Τελικά οι κλασικές μέθοδοι αποτυπώσεων περιορίστηκαν στις αποτυπώσεις σε αστικές περιοχές, όπου τα κτίρια εμποδίζουν την ορατότητα των δορυφόρων GPS, καθώς και σε τεχνικές εφαρμογές μικρής έκτασης, όπου δίνουν την ίδια ή και καλύτερη σχετική ακρίβεια (ppm).

Με το GPS, ο προσδιορισμός θέσης εμφανίζεται αρχικά να ανεξαρτητοποιείται

από τον προσδιορισμό του πεδίου βαρύτητας. Όμως το γεωδαιτικό ύψος  $h$ , μετρημένο πάνω από το ελλειψοειδές αναφοράς, το οποίο μας δίνει το GPS, δεν είναι κατάλληλο για τις περισσότερες εφαρμογές, όπου πρακτική σημασία έχει το ορθομετρικό ύψος  $H = h - N$  που μετριέται πάνω από τη μέση στάθμη της θάλασσας, δηλαδή το γεωειδές. Έτσι προκύπτει η ανάγκη προσδιορισμού του ύψους του γεωειδούς  $N$ , με αντίστοιχη ακρίβεια εκατοστού, αξιοποιώντας τόσο επίγειες όσο και διαστημικές μεθόδους. Η γεωδαισία διατηρεί το διττό χαρακτήρα της (προσδιορισμός θέσης και πεδίου βαρύτητας της γης), όχι όμως μόνο επειδή η γνώση του πεδίου βαρύτητας υπεισέρχεται στον προσδιορισμό θέσης. Ο προσδιορισμός του πεδίου βαρύτητας και ιδιαίτερα των χρονικών του μεταβολών, που οφείλονται κυρίως σε μετακινήσεις θαλάσσιων μαζών, έχει τεράστια σημασία σε πολλές εφαρμογές σχετικές με την κατανόηση του πλανήτη μας, καθώς συνδέεται με φαινόμενα όπως η μεταβολή της στάθμης των θαλασσών, τα ωκεάνια ρεύματα και τελικά με τις κλιματικές αλλαγές που προκαλεί η καταστροφή του όζοντος της ατμόσφαιρας. Η ακρίβεια που απαιτείται για τον ασφαλές προσδιορισμό των πολύ μικρών χρονικών μεταβολών του πεδίου βαρύτητας, δεν μπορεί να εξασφαλιστεί από την ανάλυση τροχιών δορυφόρων σε χαμηλό ύψος (όπου το πεδίο βαρύτητας είναι εντονότερο), αλλά από τη μέθοδο της δορυφορικής βαθμιδομετρίας, η οποία είναι πολύ πιο ευαίσθητη στις λεπτομέρειες του πεδίου βαρύτητας. Στη βαθμιδομετρία μετρούνται οι 9 ρυθμοί μεταβολής των 3 συνιστωσών του διανύσματος της βαρύτητας ως προς 3 αμοιβαία ορθογώνιες κατευθύνσεις, π.χ. τις κατευθύνσεις των αξόνων του συστήματος αναφοράς, από τους οποίους μόνο 6 είναι ανεξάρτητες παράμετροι. Η γεωδαιτική κοινότητα προσβλέπει με ανυπομονησία στην αποστολή βαθμιδομετρίας GOCE (= Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer, εξερεύνηση του πεδίου βαρύτητας και της σταθερής-κατάστασης κυκλοφορίας των ωκεανών), την οποία έχει προγραμματίσει για το 2006 η Ευρωπαϊκή Διαστημική Υπηρεσία (ESA).

Με τις μεγάλες ακρίβειες, που δίνουν οι διαστημικές μέθοδοι, καταπίπτει και η τελευταία απλουστευτική παραδοχή για το σχήμα της γης, η παραδοχή ότι η γη είναι ένα άκαμπτο σώμα. Στην πραγματικότητα η γη παραμορφώνεται συνεχώς με ποιο έντονη την περιοδική παραμόρφωση των παλιρροιών του στερεού φλοιού της, παρόμοιων με εκείνες των θαλασσών, και λιγότερη έντονη, αλλά πάντως παρατηρήσιμη, την συνεχή παραμόρφωση που οφείλεται στην κίνηση των τεκτονικών πλακών. Για μία άκαμπτη γη είναι αρκετό να ορίσουμε το σύστημα αναφοράς σε μία οποιαδήποτε χρονική στιγμή, οπότε ορίζεται αυτόματα

και για κάθε άλλη στιγμή, μέσα από την απαίτηση να παραμείνει στην ίδια θέση, ως προς το αμετάβλητο σχήμα των υλικών σημείων που απαρτίζουν τη γη. Αντίθετα, για μία παραμορφώσιμη γη, που το σχήμα της αλλάζει συνεχώς και κάθε υλικό της σημείο βρίσκεται σε κίνηση σε σχέση με τα άλλα, το σύστημα αναφοράς πρέπει να οριστεί για κάθε χρονική στιγμή ξεχωριστά! Η καλύτερη επιλογή είναι αυτή ενός συστήματος αναφοράς, ως προς το οποίο οι επιμέρους γήινες μάζες εμφανίζονται να κινούνται όσο το δυνατόν λιγότερο. Ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς αντιπροσωπεύει το σύνολο της γης κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Η μεταβολή του προσανατολισμού των αξόνων του ως προς τον ουράνιο θόλο, περιγράφει πλέον το φαινόμενο της περιστροφής της παραμορφώσιμης γης.

Η σημασία που έχει η εγκατάσταση και η διατήρηση ενός συστήματος αναφοράς, για το σύνολο της γης, και του προσδιορισμού της περιστροφικής κίνησής του ως προς τον ουράνιο θόλο, οδήγησε στην αντικατάσταση της Διεθνούς Υπηρεσίας Κίνησης του Πόλου, από την «Διεθνή Υπηρεσία Περιστροφής της Γης και Συστημάτων Αναφοράς» (IERS = International Earth Rotation and Reference Systems Service), η οποία είναι κοινή υπηρεσία της IAG και της IAU. Αντικείμενο της Υπηρεσίας αυτής είναι ο ορισμός και η διαχείριση δύο συστημάτων αναφοράς, ενός για τον ουράνιο θόλο το «Διεθνές Ουράνιο Σύστημα Αναφοράς» (ICRS = International Celestial Reference System) και ένα για τη γη, το «Διεθνές Επίγειο Σύστημα Αναφοράς» (ITRS = International Terrestrial Reference System), καθώς και η παροχή των «Παραμέτρων Προσανατολισμού της Γης» (EOP = Earth Orientation Parameters) οι οποίες συνδέουν τα δύο συστήματα.

Στην πράξη, τα συστήματα αναφοράς υλοποιούνται δίνοντας συντεταγμένες σε επιλεγμένα σημεία, το σύνολο των οποίων αποτελεί ένα «πλαίσιο» αναφοράς. Το ICRS υλοποιείται από το «Διεθνές Ουράνιο Πλαίσιο Αναφοράς» (ICRF = International Celestial Reference Frame) το οποίο αποτελείται από τις συντεταγμένες (γωνίες διεύθυνσης) ενός συνόλου επιλεγμένων ραδιοπηγών, οι οποίες συμμετέχουν στις παρατηρήσεις του VLBI. Το ITRS υλοποιείται από το «Διεθνές Επίγειο Πλαίσιο Αναφοράς» (ITRF = International Terrestrial Reference Frame) το οποίο αποτελείται από τις καρτεσιανές συντεταγμένες και τις συνιστώσες των ταχυτήτων ενός δικτύου επιλεγμένων σταθμών πάνω στη γη. Σύμφωνα με το μοντέλο που χρησιμοποιεί η IERS για την παραμορφώσιμη γη, αφού βέβαια αφαιρεθούν οι περιοδικές μετακινήσεις λόγω της παλίνρροιας του στερεού φλοιού, τα επιφανειακά σημεία κινούνται σε γραμμική κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Με τη συγκέντρωση συνεχώς νέων δεδομένων παρατήρησης, το

ITRF ανανεώνεται συνεχώς σε νέες «εκδόσεις», οι οποίες χαρακτηρίζονται από τη χρονολογία αναφοράς, π.χ. ITRF2000.

Για να ανταποκριθεί στις νέες προκλήσεις, η Διεθνής Γεωδαιτική Ένωση υιοθέτησε σημαντικές μεταβολές στην δομή της κατά την Γενική Συνέλευσή της, το 2003, στο Σαπόρο της Ιαπωνίας. Μεταξύ άλλων, οι 5 «Τομείς» (Sections) με αντικείμενα (1) Προσδιορισμός Θέσης, (2) Προχωρημένες Διαστημικές Τεχνικές, (3) Προσδιορισμός του Πεδίου Βαρύτητας, (4) Γενική Θεωρία και Μεθοδολογία και (5) Γεωδυναμική, αντικαταστάθηκαν από 4 «Επιτροπές» (Commissions) με αντικείμενα (1) Συστήματα Αναφοράς, (2) Πεδίο Βαρύτητας (3) Περιστροφή της Γης και Γεωδυναμική και (4) Προσδιορισμός Θέσης και Εφαρμογές, καθώς και από μία «μεταξύ των επιτροπών» Επιτροπή (Committee), με αντικείμενο την Θεωρία. Η νέα αυτή δομή δίνει έμφαση στη σημασία που έχουν, για τη Γεωδαισία και τις συγγενικές Επιστήμες της Γης, η εγκατάσταση και η διαχείριση των συστημάτων αναφοράς, τα οποία αποτελούν το κύριο αντικείμενο του παρόντος συγγράμματος.