Α. Δερμάνης

Συνορθώσεις Παρατηρήσεων
και
Θεωρία Εκτίμησης

τόμος 2

εκδόσεις Ζήτη

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1999

Πρόλογος στον 2ο τόμο

Με την έκδοση του 2ου τόμου ολοκληρώνεται το βιβλίο «Συνορθώσεις Παρατηρήσεων και Θεωρία Εκτίμησης», που αποτελεί μια εισαγωγή στο σύνθετο και ευρύ θέμα της ανάλυσης δεδομένων στις επιστήμες που απαρτίζουν το πεδίο δράσης του Τοπογράφου Μηχανικού. Πέρα από τη μερική κάλυψη των αναγκών του ομώνυμου μαθήματος που διδάσκεται στο Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του ΑΠΘ, ο τόμος αυτός έχει ένα ευρύτερο χαρακτήρα που θα του επιτρέψει —ελπίζω— να παίξει το ρόλο ενός βασικού κειμένου αναφοράς για τις επιστήμες της Γεωδαισίας, της Τοπογραφίας της Φωτογραμμετρίας και της Χαρτογραφίας.

Συγκεκριμένα έγινε προσπάθεια να δημιουργηθεί η σχετική υποδομή για τις ανάγκες των μαθημάτων «Τοπογραφικά Δίκτυα και Υπολογισμοί», «Ελλειψοειδής Γεωδαισία και Δίκτυα», «Φυσική Γεωδαισία», «Βαρυτημετρία», «Εφαρμογές Ρυμοτομικών Σχεδίων», «Τοπογραφικά Δίκτυα Ελέγχου Ειδικών Εφαρμογών», «Εφαρμογές Τηλεπισκόπησης», «Αυτοματοποιημένη Χαρτογραφία», καθώς και για την τυχόν μελλοντική διδασκαλία της σύγχρονης αναλυτικής φωτογραμμετρίας.

Στο συνάδελφο και φίλο Δημήτρη Ρωσσικόπουλο οφείλονται θερμές ευχαριστίες για την ουσιαστική του υποστήριξη, και κύρια για την ηθική του συμπαράσταση στο δύσκολο στάδιο της προετοιμασίας του βιβλίου για έκδοση.

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 1987

Α. Δερμάνης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

7

Η μέθοδος των εξισώσεων παρατηρήσεων

7.1. Το πρόβλημα της εκτίμησης παραμέτρων και η συνόρθωση των παρατηρήσεων

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε μια μέθοδο ανάλυσης δεδομένων γιά τον ποσοτικό προσδιορισμό φυσικών συστημάτων με γνωστά ποιοτικά χαρακτηριστικά. Με τον όρο «γνωστά ποιοτικά χαρακτηριστικά» εννοούμε ότι είναι ήδη γνωστές από προηγούμενη ανάλυση και έχουν διατυπωθεί με μαθηματικές εξισώσεις οι σχέσεις ανάμεσα στα διάφορα μεγέθη τα σχετικά με το φυσικό σύστημα που εξετάζουμε.

Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατόν να επιλέξουμε έναν αριθμό μεγεθών, τέτοιων ώστε ο προσδιορισμός των τιμών τους να οδηγεί και στον προσδιορισμό της τιμής κάθε άλλου σχετικού με το σύστημα μεγέθους μέσα από ήδη γνωστές μαθηματικές σχέσεις. Τα επιλεγμένα αυτά μεγέθη ονομάζονται **παράμετροι** του φυσικού συστήματος. Ο αριθμός των παραμέτρων ενός φυσικού συστήματος πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερος. Ο ελάχιστος αριθμός r των παραμέτρων που αρκούν για τον πλήρη προσδιορισμό ενός φυσικού συστήματος (δηλαδή για τον προσδιορισμό κάθε άλλου σχετικού με το σύστημα μεγέθους) ονομάζεται **παραμετρικός βαθμός** του συστήματος. Ο παραμετρικός βαθμός είναι ένα αναλλοίωτο χαρακτηριστικό του φυσικού συστήματος, στα πλαίσια βέβαια της περιγραφής του από ένα συγκεκριμένο μαθηματικό μοντέλο. Εδώ περιοριζόμαστε στην ανάλυση φυσικών συστημάτων με πεπερασμένο παραμετρικό βαθμό.

Σαν ένα απλό παράδειγμα φυσικού συστήματος ας θεωρήσουμε ένα επίπεδο τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες Α, Β, Γ και πλευρές α, β, γ. Το σύστημα είναι ποιοτικά γνωστό αν λάβουμε υπόψη το σύνολο των γνωστών από την τριγωνομετρία σχέσεων ανάμεσα στα διάφορα σχετικά με το τρίγωνο μεγέθη (γωνίες, πλευρές, ύψη, περίμετρος, εμβαδόν, κ.λπ.). Οι σχέσεις αυτές ισχύουν για οποιοδήποτε τρίγωνο, ενώ ο προσδιορισμός των αριθμητικών τιμών στοιχείων του τριγώνου αποτελεί τον ποσοτικό προσδιορισμό ενός συγκεκριμένου φυσικού τριγώνου.

Ο παραμετρικός βαθμός του τριγώνου είναι τρία αφού αρκούν οι τιμές τριών στοιχείων για τον προσδιορισμό του αλλά η επιλογή τριών παραμέτρων δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη. Έτσι μπορούν να επιλεγούν σαν παράμετροι περιγραφής του τριγώνου τρεις πλευρές του (αβγ) ή μια γωνία και δύο πλευρές του (Ααβ, Ααγ, Αβγ, Βαβ, Βαγ, Βθγ, Γαβ, Γαγ, Γβγ), ή μια πλευρά και δύο γωνίες (αΑΒ, αΑΓ, αΒΓ, βΑΒ, βΑΓ, βΒΓ, γΑΒ, γΑΓ, γΒΓ) ή ακόμη και περισσότερο ασυνήθιστες επιλογές όπως π.χ. ένα ύψος, το εμβαδόν και μια γωνία.

Για τους σκοπούς της ανάλυσης είναι προτιμότερο να επιλέγονται παράμετροι τέτοιες ώστε ο υπολογισμός άλλων μεγεθών από αυτές να είναι όσο το δυνατόν απλούστερος.

Για τον ποσοτικό προσδιορισμό ενός φυσικού συστήματος πρέπει να γίνουν μετρήσεις κάποιων μεγεθών του συστήματος, που προσφέρονται για το σκοπό αυτό. Τα αριθμητικά αποτελέσματα των μετρήσεων ονομάζονται **παρατηρήσεις** και αποτελούν την πρωτογενή μορφή ποσοτικής πληροφορίας σχετικής με το φυσικό σύστημα.

Ο αριθμός των παρατηρήσεων δεν πρέπει να είναι μικρότερος από τον παραμετρικό βαθμό του συστήματος γιατί διαφορετικά δεν διαθέτουμε αρκετή πληροφορία για τον ποσοτικό προσδιορισμό του. Αυτό δε σημαίνει ότι όταν οι παρατηρήσεις είναι περισσότερες ή ίσες με τον παραμετρικό βαθμό περιέχουν αυτόματα και αρκετή πληροφορία για τον ποσοτικό προσδιορισμό του φυσικού συστήματος. Στο παράδειγμα του τριγώνου με παραμετρικό βαθμό τρία, οι παρατηρήσεις των τριών γωνιών του δεν αρκούν επειδή καθορίζουν μόνο το σχήμα αλλά όχι και το μέγεθος του τριγώνου.

Αν οι τιμές των παρατηρήσεων ήταν απαλλαγμένες από τα σφάλματα των μετρήσεων θα αρκούσε ένας αριθμός κατάλληλων παρατηρήσεων ίσων με τον παραμετρικό βαθμό για τον ποσοτικό προσδιορισμό του συστήματος και ιδιαίτερα για τον προσδιορισμό των τιμών των παραμέτρων. Πράγματι με τη βοήθεια σχέσεων που να συνδέουν τις παρατηρούμενες ποσότητες με τις παραμέτρους θα μπορούσαν να καταστρωθούν εξισώσεις, μία για κάθε παρατήρηση, τόσες δηλαδή όσος και ο αριθμός των άγνωστων παραμέτρων. Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων θα προσδιοριζόταν και οι «αληθινές» τιμές των παραμέτρων. Επιπρόσθετες παρατηρήσεις δεν θα είχαν να προσθέσουν καμιά επιπρόσθετη πληροφορία στην ιδεατή αυτή περίπτωση των τέλειων μετρήσεων.

Στην πραγματικότητα οι παρατηρήσεις διαφέρουν από τις αντίστοιχες αληθινές τιμές των παρατηρούμενων μεγεθών εξαιτίας των αναπόφευκτων σφαλμάτων των μετρήσεων. Έτσι οι τιμές των παραμέτρων που υπολογίζονται από ίσο αριθμό παρατηρήσεων είναι αναγκαστικά επηρεασμένες και αυτές από τα σφάλματα των παρατηρήσεων και διαφέρουν από τις αντίστοιχες αληθινές τιμές τους.

Στην περίπτωση που οι παρατηρήσεις είναι περισσότερες από τις παραμέτρους και απαλλαγμένες από σφάλματα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα υποσύνολό τους ίσο σε αριθμό με το πλήθος των παραμέτρων. Οι τιμές των παραμέτρων που προσδιορίζονται από το υποσύνολο είναι οι ίδιες πάντα ανεξάρτητα από το ποιό υποσύνολο χρησιμοποιήθηκε. Στην περίπτωση όμως πραγματικών παρατηρήσεων και εξαιτίας των σφαλμάτων, θα προκύπτουν διαφορετικές τιμές των παραμέτρων από κάθε ένα από τα παραπάνω υποσύνολα.

Το πρόβλημα της επιλογής κατάλληλων τιμών για τις παραμέτρους με τη βοήθεια των παρατηρήσεων είναι ένα πρόβλημα **εκτίμησης των παραμέτρων**. Εξαιτίας των σφαλμάτων οι τιμές αυτές διαφέρουν από τις αντίστοιχες αληθινές τιμές και ονομάζονται κατά εκτίμηση τιμές των παραμέτρων.

Για τη λύση του προβλήματος της εκτίμησης των παραμέτρων ο απλούστερος τρόπος θα ήταν να περιοριζόμασταν σε μετρήσεις ίσες σε αριθμό με τις παραμέτρους του συστήματος, γνωρίζοντας πως οι τιμές των παραμέτρων που προκύπτουν είναι επηρεασμένες από τα σφάλματα των μετρήσεων.

Αν υποθέσουμε ότι οι μετρήσεις είναι απαλλαγμένες από χονδροειδή και συστηματικά σφάλματα, τα σφάλματα που παραμένουν είναι τα τυχαία σφάλματα. Τα τυχαία σφάλματα έχουν την τάση να αλληλοαναιρούνται και για το λόγο αυτό είναι προτιμότερο να εκτελούνται όσο το δυνατόν περισσότερες μετρήσεις, ώστε από την ανάλυσή τους να προκύπτουν τιμές των παραμέτρων όσο το δυνατόν περισσότερο απαλλαγμένες από τα σφάλματα των μετρήσεων.

Θα εξετάσουμε στο κεφάλαιο αυτό τη μέθοδο υπολογισμού των τιμών των παραμέτρων από περισσότερες σε αριθμό μετρήσεις, έτσι ώστε οι κατά εκτίμηση τιμές των παραμέτρων να είναι «βέλτιστες» σύμφωνα με κάποιο κριτήριο βελτιστοποίησης. Το σχετικό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα βέλτιστης εκτίμησης παραμέτρων. Από τις βέλτιστες κατά εκτίμηση τιμές των παραμέτρων μπορούν να υπολογιστούν κατά εκτίμηση τιμές των παρατηρούμενων μεγεθών. Οι τιμές αυτές διαφέρουν από τις αντίστοιχες τιμές των παρατηρήσεων τις οποίες και αντικαθιστούν. Η διαδικασία αυτή της αντικατάστασης των επηρεασμένων από τα σφάλματα παρατηρήσεων με συμβιβαστές μεταξύ τους κατά εκτίμηση τιμές των παρατηρούμενων μεγεθών ονομάζεται **συνόρθωση των παρατηρήσεων**.

Η συνόρθωση των παρατηρήσεων όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο μπορεί να γίνει και χωρίς να μεσολαβήσει εκτίμηση των παραμέτρων του φυσικού συστήματος.

7.2. Οι εξισώσεις παρατηρήσεων

Ας συμβολίσουμε με $x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_m^\alpha$ τις αληθινές τιμές των m παραμέτρων που επιλέχθηκαν για την περιγραφή ενός φυσικού συστήματος με παραμετρικό βαθμό $r = m$ και με $y_1^\alpha, y_2^\alpha, \ldots, y_n^\alpha$ τις αληθινές τιμές n παρατηρούμενων μεγεθών, όπου $n > m$, από την ποιοτική ανάλυση του συστήματος είναι γνωστές σχέσεις της μορφής

$$
\begin{aligned}
y_1^\alpha &= f_1\,(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_m^\alpha) \\
y_2^\alpha &= f_2\,(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_m^\alpha) \\
&\vdots \\
y_n^\alpha &= f_n\,(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_m^\alpha)\,. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Οι σχέσεις αυτές που εκφράζουν τις παρατηρούμενες ποσότητες σαν συναρτήσεις των παραμέτρων συνιστούν το **μαθηματικό μοντέλο των παρατηρήσεων**.

Οι παρατηρήσεις $y_1^b, y_2^b, \ldots, y_n^b$, που είναι τα αριθμητικά εξαγόμενα των μετρήσεων, διαφέρουν από τις αντίστοιχες αληθινές τιμές εξαιτίας των σφαλμάτων των μετρήσεων. Έχουμε

$$
(2) \qquad y_i^b = y_i^\alpha + v_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n
$$

όπου $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι τα αντίστοιχα σφάλματα των μετρήσεων.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν οι **εξισώσεις παρατηρήσεων**

$$
\begin{aligned}
y_1^b &= f_1\,(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_m^\alpha) + v_1 \\
y_2^b &= f_2\,(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_m^\alpha) + v_2 \\
&\vdots \\
y_n^b &= f_n\,(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_m^\alpha) + v_n \qquad (3)
\end{aligned}
$$

όπου οι τιμές των $y_1^b, y_2^b, \ldots, y_n^b$ είναι γνωστές ενώ οι τιμές των $x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_m^\alpha$ και των $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι άγνωστες.

Χρησιμοποιώντας συμβολισμούς πινάκων εισάγουμε τους πίνακες

(4) $\mathbf{x}^{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1^{\alpha} \\ x_2^{\alpha} \\ \vdots \\ x_m^{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{\alpha} = \begin{bmatrix} y_1^{\alpha} \\ y_2^{\alpha} \\ \vdots \\ y_n^{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{b} = \begin{bmatrix} y_1^{b} \\ y_2^{b} \\ \vdots \\ y_n^{b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

και το μαθηματικό μοντέλο των παρατηρήσεων γράφεται

(5) $$\mathbf{y}^{\alpha} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\alpha})\,.$$

Οι σχέσεις (2) παίρνουν τη μορφή

(6) $$\mathbf{y}^{b} = \mathbf{y}^{\alpha} + \mathbf{v}$$

και οι εξισώσεις παρατηρήσεων γίνονται

(7) $$\mathbf{y}^{b} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\alpha}) + \mathbf{v}\,.$$

Για κάθε πίνακα τιμών των παραμέτρων $\mathbf{x}^{\alpha}$ μπορεί να υπολογιστεί ο αντίστοιχος πίνακας των σφαλμάτων

(8) $$\mathbf{v} = \mathbf{y}^{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\alpha})\,.$$

Τα σφάλματα $\mathbf{v}$ είναι γενικά ποσότητες με μικρές απόλυτες τιμές. Έτσι τιμές των παραμέτρων $\mathbf{x}^{\alpha}$ που οδηγούν μέσα από τη σχέση (8) σε μικρότερες τιμές των σφαλμάτων $\mathbf{v}$, είναι πιο κατάλληλες σε σχέση με τιμές που οδηγούν σε μεγάλες τιμές σφαλμάτων. Έτσι αναζητούνται σαν βέλτιστες οι τιμές των παραμέτρων που οδηγούν στα μικρότερα κατά το δυνατόν σφάλματα. Για το σκοπό αυτό εισάγεται μια κατάλληλη θετική ποσότητα

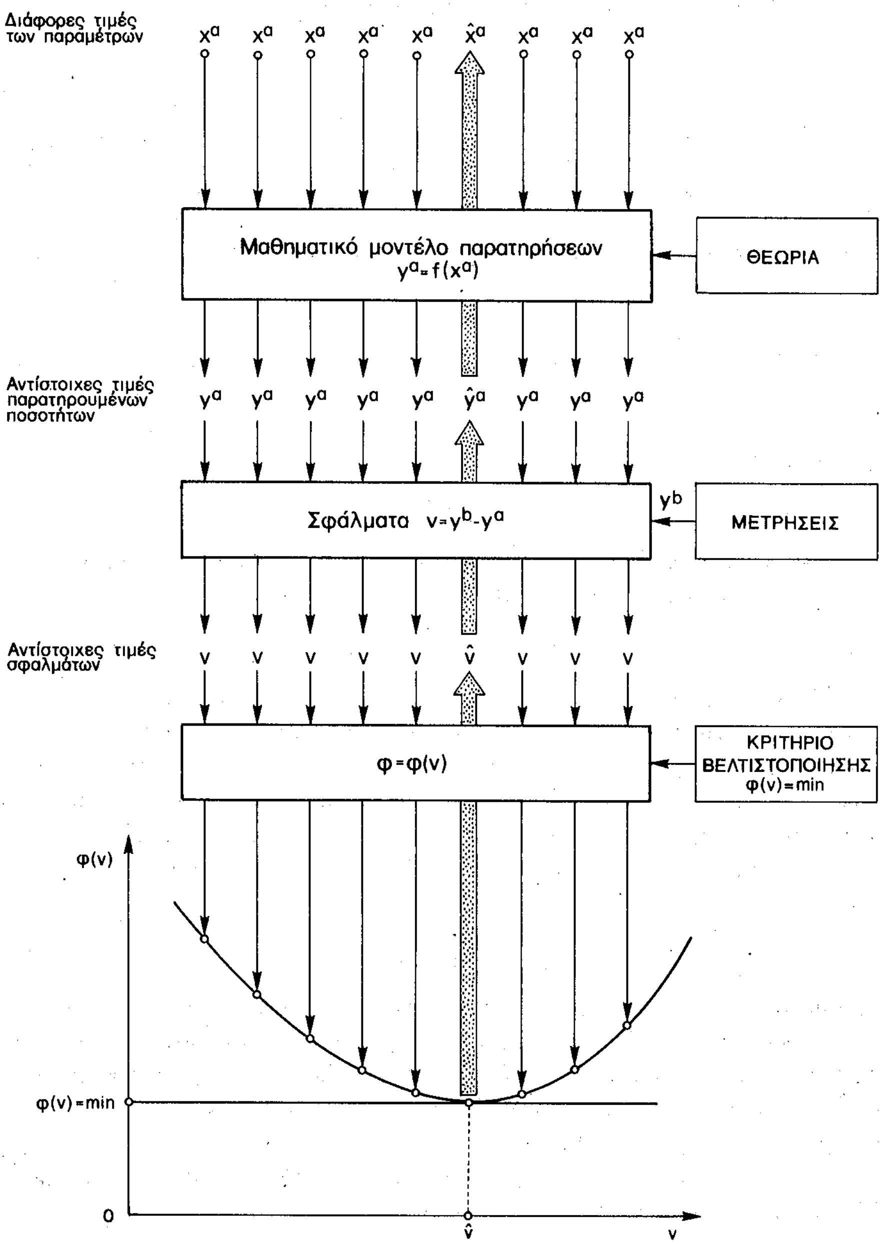
$$\varphi = \varphi(\mathbf{v}) = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

που μετρά κατά κάποιο τρόπο το μέγεθος των σφαλμάτων και ονομάζεται **κριτήριο βελτιστοποίησης**. Τέτοια κριτήρια βελτιστοποίησης έχουμε ήδη εξετάσει στο κεφάλαιο 2 του 1ου τόμου. Εδώ θα περιοριστούμε στο κριτήριο των ελάχιστων τετραγώνων και σε ορισμένες γενικεύσεις του (ελάχιστα τετράγωνα με βάρη).

Απ' όλες τις δυνατές τιμές των παραμέτρων $\mathbf{x}^{\alpha}$ επιλέγονται σαν βέλτιστες οι τιμές $\hat{\mathbf{x}}^{\alpha}$ που οδηγούν σε σφάλματα

(9) $$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{y}^{b} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}^{\alpha})$$

που ελαχιστοποιούν το κριτήριο βελτιστοποίησης $\varphi(\mathbf{v})$. Έχουμε δηλαδή



Σχήμα 1: Σχηματικό διάγραμμα της βέλτιστης εκτίμησης παραμέτρων με τη μέθοδο των εξισώσεων παρατηρήσεων.