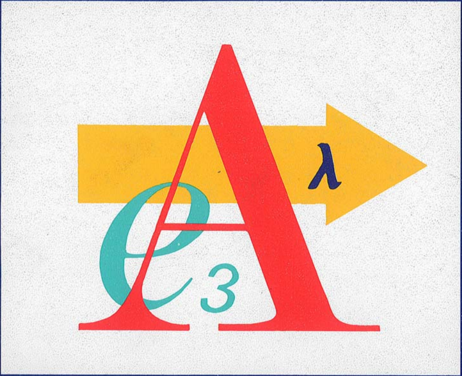

γραμμικη αλγεβρα και θεωρια πινακων

Α. Δερμανης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Πρόλογος

Τα τελευταία χρόνια, η γραμμική άλγεβρα σαν κλάδος των μαθηματικών και οι πίνακες σαν το αντίστοιχο εργαλείο συμβολισμού, έχουν αποκτήσει ένα σημαντικό ρόλο που συνεχώς πλαταίνει για τις περισσότερες από τις εφαρμοσμένες επιστήμες. Ένας από τους λόγους για τη διεύρυνση της σημασίας της γραμμικής άλγεβρας είναι ότι πολλά από τα προβλήματα των εφαρμοσμένων επιστημών διατυπώνονται είτε απευθείας με τη μορφή γραμμικών εξισώσεων, είτε με την μορφή εξισώσεων που μπορούν εύκολα να μετατραπούν σε γραμμικές με τη βοήθεια μιας απλής διαδικασίας γραμμικοποίησης.

Ο σημαντικότερος όμως λόγος είναι η μεγάλη διάδοση των ηλεκτρονικών υπολογιστών που διευκολύνοντας σε εξαιρετικά μεγάλο βαθμό τους αριθμητικούς υπολογισμούς, ώθησαν στην ανάπτυξη νέων τρόπων προσέγγισης στα προβλήματα των εφαρμοσμένων επιστημών. Με την επακόλουθη ανάπτυξη και διάδοση των μεθόδων της αριθμητικής ανάλυσης, προβλήματα που η μαθηματική τους διατύπωση έχει αρχικά το χαρακτήρα διαφορικών εξισώσεων ή εξισώσεων με ολοκληρώματα, παίρνουν και αυτά τη μορφή συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε κύρια για να καλύψει τις ανάγκες της διδασκαλίας του μαθήματος «Γραμμική Άλγεβρα και Πίνακες» στο τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών της Πολυτεχνικής σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Η ύλη του ανταποκρίνεται στο αντίστοιχο αναλυτικό περιεχόμενο.

Η Τοπογραφία είναι μια επιστήμη όπου οι πίνακες είναι το κατεξοχήν εργαλείο για τις πρακτικές της εφαρμογές με σημασία μεγαλύτερη ακόμη και από αυτόν το στοιχειώδη διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό.

Πρέπει να τονιστεί ότι το βιβλίο αυτό δεν έχει γραφεί από τη σκοπιά κάποιου που αντιλαμβάνεται τα μαθηματικά μόνο σαν ένα ενιαίο σύνολο με αναμφισβήτητη εσωτερική ομορφιά που κάνει την ενασχόληση με αυτά πηγή ευχαρίστησης, αλλά προπάντων από τη σκοπιά κάποιου που βλέπει τα μαθηματικά σαν εργαλείο στην υπηρεσία μιας άλλης επιστήμης, όπου ο βαθμός *της κατανόησής τους συνδέεται άμεσα με την αποτελεσματικότητά τους στη λύση συγκεκριμένων προβλημάτων.*

Με τη σκέψη ότι τα μαθηματικά δεν μπορούν να διδαχτούν πραγματικά μέσα στα πλαίσια ενός μαθήματος και μόνο, αλλά περισσότερο μέσα από τη συνεχή εφαρμογή τους σε συγκεκριμένα προβλήματα, θελήσαμε να δώσουμε ένα βασικό βιβλίο αναφοράς που να συντροφεύει το φοιτητή σε όλα τα χρόνια των σπουδών του, αλλά και στα μετέπειτα χρόνια της επαγγελματικής του δραστηριότητας.

Το βιβλίο αποτελείται από είκοσι κεφάλαια που μπορούν να διαχωριστούν σε τέσσερις ενότητες, ανισοβαρείς μεταξύ τους, τόσο από άποψη έκτασης όσο και από άποψη διαφορετικού τρόπου γραψίματος.

Στην πρώτη ενότητα (κεφάλαια 1-13) παρουσιάζεται το εργαλείο-πίνακες με κέντρο βάρους τη λύση ενός συστήματος οσωνδήποτε γραμμικών εξισώσεων με οσουσδήποτε αγνώστους. Η ανάπτυξη των κεφαλαίων αυτής της ενότητας γίνεται λιτά και με έμφαση στα στοιχεία που είναι σημαντικά για τις εφαρμογές έτσι ώστε να είναι εύκολη η μετέπειτα χρήση του σαν βασικό κείμενο αναφοράς. Οι αποδείξεις έχουν μετατεθεί στις ασκήσεις και σε μερικές περιπτώσεις έχουν παραλειφτεί εντελώς. Αντίθετα έχει συμπεριληφθεί ένας σημαντικός αριθμός παραδειγμάτων για να διευκολυνθεί η κατανόηση των βασικών εννοιών. Όλα τα κεφάλαια συνοδεύονται από λυμένες ασκήσεις τριών ειδών: ασκήσεις-αποδείξεις προτάσεων, ασκήσεις εξοικείωσης με το αντικείμενο και ασκήσεις συγκεκριμένων εφαρμογών.

Η δεύτερη ενότητα (κεφάλαια 14-17) είναι αφιερωμένη στη γεωμετρία του επιπέδου και του τρισδιάστατου ευκλείδειου χώρου και στα σχετικά διανύσματα, μια και το βιβλίο απευθύνεται κύρια σε «γεωμέτρες» με την κυριολεκτική έννοια του όρου. Ακολουθώντας ένα πιο χαλαρό ύφος, έγινε προσπάθεια από τη μια να δοθούν οι εφαρμογές των πινάκων στη γεωμετρία και από την άλλη να χρησιμοποιηθεί η γεωμετρία σαν μέσο για την «εικονογράφηση» των αφηρημένων συστημάτων γραμμικών εξισώσεων όπου ο αριθμός των εξισώσεων και των αγνώστων δεν ξεπερνά τους τρεις. Έτσι η ενότητα αυτή αποτελεί τη γέφυρα ανάμεσα στην πρώτη και την τρίτη ενότητα.

Στην τρίτη ενότητα (κεφάλαια 18-19) δίνεται με σύντομο και κάπως αυστηρότερο μαθηματικό τρόπο η στοιχειώδης θεωρία των γραμμικών χώρων n διαστάσεων και των σχετικών γραμμικών απεικονίσεων που αποτελούν προϊόν μιας διαδικασίας αφαίρεσης που ξεκινά από τις συγκεκριμένες αντίστοιχες γεωμετρικές έννοιες των κεφαλαίων της δεύτερης ενότητας.

Στην τέταρτη και τελευταία ενότητα που αποτελείται από ένα μόνο κεφάλαιο (20) γίνεται προσπάθεια μιας πρώτης εξοικείωσης με τους καρτεσιανούς τανυστές. Εκτός από τη σημασία τους για τις φυσικές επιστήμες τονίζεται και ο ρόλος τους σαν εναλλακτική μορφή συμβολισμού με την *παρουσίαση γεωμετρικών εφαρμογών τους σε αντίστιξη με ανάλογες γεωμετρικές εφαρμογές των πινάκων στη δεύτερη ενότητα.*

Η έλλειψη καθιερωμένης ορολογίας αποτελεί πάντα ένα πρόβλημα για τη συγγραφή μαθηματικών κειμένων στα Ελληνικά. Για τις πιο συχνές έννοιες χρησιμοποιήθηκαν οι πιο συνηθισμένοι στον κλάδο μας όροι. Για τις άλλες έγινε προσπάθεια να αποφευχτεί η χρησιμοποίηση όρων που αποτελούν κακή μετάφραση από τους αντίστοιχους αγγλικούς, καθώς και η άκριτη μεταφορά όρων από την καθαρεύουσα στη δημοτική. Για τις λίγες περιπτώσεις καθιερωμένων όρων που η γλωσσική ετυμολογία τους είναι άσχετη με αυτό που προσπαθούν να εκφράσουν προτιμήθηκε η χρήση νεολογισμών.

Η αρίθμηση εξισώσεων και ασκήσεων είναι ανεξάρτητη σε κάθε κεφάλαιο. Οι αναφορές σε εξισώσεις, υποκεφάλαια ή ασκήσεις έχουν περιοριστεί στο ελάχιστο. Όπου γίνεται αναφορά από ένα κεφάλαιο σε άλλο, ο αριθμός του κεφαλαίου προηγείται και ακολουθεί ο αριθμός της εξίσωσης ή της άσκησης.

Η ολοκλήρωση του βιβλίου θα ήταν αδύνατη χωρίς τη βοήθεια συνεργατών και φίλων. Πρώτα θα ήθελα να ευχαριστήσω τη Βάσω Δερμάνη για την προσπάθεια της να βελτιώσει το κείμενο γλωσσικά και τον Θύμιο Μυρισιώτη που διάβασε το χειρόγραφό και έκανε τον έλεγχο των ασκήσεων και των παραδειγμάτων. Κάθε ατέλεια που παρέμεινε θαρύνει τον συγγραφέα. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τους φίλους και συνεργάτες Κώστα Κατσάμπαλο και Δημήτρη Ρωσσικόπουλο για την πολύτιμη βοήθεια τους και τη γενικότερη συμπαράσταση τους στο τελευταίο και δυσκολότερο στάδιο της ολοκλήρωσης του βιβλίου.

Ελπίζουμε ότι το βιβλίο αυτό θα φανεί χρήσιμο και σε συναδέλφους άλλων επιστημονικών κλάδων που χρησιμοποιούν την γραμμική άλγεβρα και τους πίνακες στις εφαρμογές τους.

Θεσσαλονίκη, 1985

Α. Δερμάνης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Οδηγός για τις ασκήσεις

Για την καλύτερη αξιοποίηση των ασκήσεων εφαρμογών, δίνουμε τις επιμέρους επιστημονικές περιοχές στις οποίες αναφέρονται :

Γεωδαισία	1.19 / 4.24 / 11.4 / 11.7
Γεωδυναμική	8.15
Στατιστική	2.14 / 2.16 / 2.17 / 11.6
Συνορθώσεις	2.7 / 4.25 / 6.11 / 9.1 / 9.2 / 9.6 / 12.3 12.4 / 12.5 / 12.6 / 13.7 / 13.8 / 13.10
Τοπογραφία	2.18 / 2.19 / 3.13 / 5.12 / 7.9 / 8.13 / 8.15 12.5 / 12.6 / 13.10
Χαρτογραφία	8.13 / 8.15
Φωτογραμμετρία	1.20

1

Πίνακες

1.1. ΕΝΝΟΙΑ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές εμφανίζονται σύνολα αριθμητικών τιμών που από τη φύση τους ακολουθούν μια διάταξη κατά δύο έννοιες. Για παράδειγμα, οι αριθμοί των φοιτητών που μπήκαν τα τελευταία πέντε χρόνια στα τμήματα της Πολυτεχνικής Σχολής του ΑΠΘ, έχουν μια διάταξη κατά τμήμα και μια διάταξη κατά ακαδημαϊκή χρονιά

Ακαδ. χρονιά / Τμήμα	1980-81	1981-82	1982-83	1983-84	1984-85
Πολιτικοί	183	193	195	200	300
Αρχιτέκτονες	68	93	107	80	150
Τοπογράφοι	84	85	86	97	150
Ηλεκτρολόγοι	101	115	118	115	150
Μηχανολόγοι	89	56	109	110	150
Χημικοί	29	131	106	90	130

Τέτοια σύνολα αριθμών με διπλή διάταξη ονομάζονται **πίνακες.** Όταν η διάταξη των στοιχείων του πίνακα είναι δοσμένη, όταν δηλαδή είναι καθορισμένη η σημασία κάθε σειράς και κάθε στήλης, ένας πίνακας σαν τον παραπάνω μπορεί να γραφεί απλά

$$\begin{bmatrix} 183 & 193 & 195 & 200 & 300 \\ 68 & 93 & 107 & 80 & 150 \\ 84 & 85 & 86 & 97 & 150 \\ 101 & 115 & 118 & 115 & 150 \\ 89 & 56 & 109 & 110 & 150 \\ 29 & 131 & 106 & 90 & 130 \end{bmatrix} .$$

Στα μαθηματικά οι πίνακες συμβολίζονται για συντομία με κεφαλαία κατά κανόνα γράμματα του λατινικού αλφάβητου, που τυπώνονται με έντονους χαρακτήρες

$$(1) \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 183 & 193 & 195 & 200 & 300 \\ 68 & 93 & 107 & 80 & 150 \\ 84 & 85 & 86 & 97 & 150 \\ 101 & 115 & 118 & 115 & 150 \\ 89 & 56 & 109 & 110 & 150 \\ 29 & 131 & 106 & 90 & 130 \end{bmatrix} .$$

Ένα διαφορετικό παράδειγμα όπου εμφανίζονται πίνακες είναι τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων, όπως π.χ. το σύστημα

$$(2) \qquad \begin{aligned} 3x - 2y + 7z &= 3 \\ 5x + y - 2z &= -1 \\ -x + 8y + 4z &= 2 \ . \end{aligned}$$

Εδώ έχουμε τον πίνακα των συντελεστών των εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & 8 & 4 \end{bmatrix} ,$$

τον πίνακα των σταθερών όρων

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} ,$$

και τον πίνακα των αγνώστων

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

(Ο τελευταίος θα μπορούσε να γραφεί και με τη μορφή [x y z], αλλά η παραπάνω επιλογή σχετίζεται με τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων που θα δοθεί παρακάτω).

Κάθε πίνακας διαθέτει **σειρές** και **στήλες**. Έτσι οι σειρές του πίνακα **A** είναι οι σειρές

$$\begin{bmatrix} 183 & 193 & 195 & 200 & 300 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 68 & 93 & 107 & 80 & 150 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 84 & 85 & 86 & 97 & 150 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 101 & 115 & 118 & 115 & 150 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 89 & 56 & 109 & 110 & 150 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 29 & 131 & 106 & 90 & 130 \end{bmatrix}$$

και οι στήλες του είναι οι στήλες

$$\begin{bmatrix} 183 \\ 68 \\ 84 \\ 101 \\ 89 \\ 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 193 \\ 93 \\ 85 \\ 115 \\ 56 \\ 131 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 195 \\ 107 \\ 86 \\ 118 \\ 109 \\ 106 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 80 \\ 97 \\ 115 \\ 110 \\ 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 150 \\ 150 \\ 150 \\ 150 \\ 130 \end{bmatrix}.$$

Όταν ένας πίνακας έχει n σειρές και m στήλες, λέμε ότι είναι πίνακας **διαστάσεων** $n \times m$, ή απλά, ένας $n \times m$ πίνακας. Ο παραπάνω πίνακας **A** είναι διαστάσεων 6×5. Μερικές φορές οι διαστάσεις ενός πίνακα προσδιορίζονται γράφοντας

$$\underset{6\times 5}{\mathbf{A}}$$

στο παράδειγμά μας, ή

$$\underset{n \times m}{\mathbf{A}}$$

στη γενικότερη περίπτωση.

Ένας πίνακας που έχει μόνο μία σειρά ονομάζεται **πίνακας - σειρά**, και ένας πίνακας που έχει μόνο μία στήλη ονομάζεται **πίνακας - στήλη**. Οι πίνακες των σταθερών όρων και των αγνώστων του συστήματος των γραμμικών εξισώσεων (2) είναι πίνακες-στήλες. Τους πίνακες-στήλες, ειδικά, θα συμβολίζουμε εδώ και με μικρά (όχι κεφαλαία) γράμματα τυπωμένα με έντονους χαρακτήρες. Πολλές φορές οι πίνακες-στήλες ονομάζονται και **διανύσματα**.

Οι πραγματικοί αριθμοί που περιέχονται σε ένα πίνακα ονομάζονται **στοιχεία** του πίνακα. Κάθε στοιχείο χαρακτηρίζεται από τη σειρά και τη στήλη του πίνακα στις οποίες ανήκει. Το στοιχείο της σειράς i και της στήλης j ενός πίνακα **A** συμβολίζουμε με A_{ij} ή με a_{ij}. Έτσι, A_{34} είναι το στοιχείο της 3ης σειράς και της 4ης στήλης. Για τον πίνακα **A** του παραδείγματος (1) έχουμε

$$\begin{array}{lllll}
A_{11} = 183 & A_{12} = 193 & A_{13} = 195 & A_{14} = 200 & A_{15} = 300 \\
A_{21} = 68 & A_{22} = 93 & A_{23} = 107 & A_{24} = 80 & A_{25} = 150 \\
A_{31} = 84 & A_{32} = 85 & A_{33} = 86 & A_{34} = 97 & A_{35} = 150 \\
A_{41} = 101 & A_{42} = 115 & A_{43} = 118 & A_{44} = 115 & A_{45} = 150 \\
A_{51} = 89 & A_{52} = 56 & A_{53} = 109 & A_{54} = 110 & A_{55} = 150 \\
A_{61} = 29 & A_{62} = 131 & A_{63} = 106 & A_{64} = 90 & A_{65} = 130
\end{array}$$

Ο παραπάνω πίνακας **A**, που έχει συγκεκριμένες διαστάσεις, (6×5) γράφεται συμβολικά

$$(3) \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} \end{bmatrix}.$$

Προκειμένου για πίνακα με διαστάσεις $n \times m$ που δεν είναι καθορισμένες, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$(4) \qquad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix} .$$

Δύο πίνακες **A** και **B** είναι ίσοι μόνο όταν έχουν τις ίδιες διαστάσεις και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα

$$(5) \qquad A_{ij} = B_{ij} \qquad i = 1, 2,..., n \quad j = 1, 2,..., m$$

όταν δηλαδή περιέχουν τα ίδια και με την ίδια διάταξη στοιχεία.

1.2. ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πρόσθεση πινάκων

Αν ο πίνακας

$$(5) \qquad B = \begin{bmatrix} 141 & 140 & 150 & 150 & 150 \\ 70 & 70 & 80 & 80 & 60 \\ 61 & 60 & 71 & 90 & 90 \\ 70 & 71 & 80 & 90 & 110 \\ 48 & 50 & 66 & 90 & 90 \\ 51 & 50 & 60 & 80 & 100 \end{bmatrix}$$

είναι ο αντίστοιχος πίνακας του **A** προκειμένου για τα ίδια τμήματα του Ε.Μ.Π., μπορεί να προσδιοριστεί αμέσως ένας τρίτος πίνακας **C** που να περιέχει τους αριθμούς των νέων φοιτητών και για τα δύο ιδρύματα μαζί :

$$(6) \qquad C = \begin{bmatrix} 183+141 & 193+140 & 195+150 & 200+150 & 300+150 \\ 68+70 & 93+70 & 107+80 & 80+80 & 150+60 \\ 84+61 & 85+60 & 86+71 & 97+90 & 150+90 \\ 101+70 & 115+71 & 118+80 & 115+90 & 150+110 \\ 89+48 & 56+50 & 109+66 & 110+90 & 150+90 \\ 29+51 & 131+50 & 106+60 & 90+80 & 130+100 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 324 & 333 & 345 & 350 & 450 \\ 138 & 163 & 187 & 160 & 210 \\ 145 & 145 & 157 & 187 & 240 \\ 171 & 186 & 198 & 205 & 260 \\ 137 & 106 & 175 & 200 & 240 \\ 80 & 181 & 166 & 170 & 230 \end{bmatrix} .$$

Το άθροισμα **A** + **B** δυο πινάκων **A**, **B** που έχουν τις ίδιες διαστάσεις n × m είναι ένας πίνακας **C** = **A** + **B**, διαστάσεων επίσης n × m, με στοιχεία

(7) $$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} .$$

Κάθε στοιχείο του **C** προκύπτει προσθέτοντας τα στοιχεία των προσθετέων πινάκων **A** και **B** που βρίσκονται στην ίδια σειρά και στήλη

(8) $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \ldots & A_{1m}+B_{1m} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \ldots & A_{2m}+B_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1}+B_{n1} & A_{n2}+B_{n2} & \ldots & A_{nm}+B_{nm} \end{bmatrix} .$$

Μιά προφανής ιδιότητα του αθροίσματος πινάκων είναι η αντιμεταθετική ιδιότητα

(9) $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} .$$

Ο ορισμός του αθροίσματος επεκτείνεται και σε περισσότερους από δύο πίνακες των ίδιων διαστάσεων

(10) $$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \ldots + \mathbf{D} = \mathbf{X}$$

με στοιχεία

(11) $$X_{ij} = A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} + \ldots + D_{ij} .$$

'Οταν αθροίζονται περισσότεροι από δύο πίνακες, η σειρά με την οποία γίνονται οι αθροίσεις δεν έχει σημασία, π.χ.

(12) $$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) .$$

Πολλαπλασιασμός πίνακα με πραγματικό αριθμό

Το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού λ με έναν πίνακα **A** είναι ένας πίνακας

$$\mathbf{B} = \lambda\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\lambda \tag{13}$$

των ίδιων διαστάσεων με τον **A** και με στοιχεία

$$B_{ij} = \lambda\, A_{ij}\,. \tag{14}$$

Για να πολλαπλασιάσουμε δηλαδή αριθμό με πίνακα πολλαπλασιάζουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα με τον αριθμό

$$\lambda \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \dots & \lambda A_{1m} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \dots & \lambda A_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{n1} & \lambda A_{n2} & \dots & \lambda A_{nm} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Διαφορά πινάκων

Η διαφορά **A** − **B** δύο πινάκων **A** και **B** των ίδιων διαστάσεων ορίζεται με τη βοήθεια των ορισμών του αθροίσματος πινάκων και του πολλαπλασιασμού πίνακα με αριθμό

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1)\,\mathbf{B} \tag{16}$$

Έτσι

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{11}-B_{11} & A_{12}-B_{12} & \dots & A_{1m}-B_{1m} \\ A_{21}-B_{21} & A_{22}-B_{22} & \dots & A_{2m}-B_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1}-B_{n1} & A_{n2}-B_{n2} & \dots & A_{nm}-B_{nm} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Αν πάρουμε μία από τις γραμμικές εξισώσεις του συστήματος (2), π.χ. την πρώτη

$$3\,x - 2\,y + 7z = 3 \tag{18}$$

έχουμε τον πίνακα-σειρά των συντελεστών

$$[3 \quad -2 \quad 7]$$

τον πίνακα-στήλη των αγνώστων

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

και το σταθερό όρο 3. Μπορούμε να πούμε ότι ο σταθερός όρος δημιουργείται από τον «πολλαπλασιασμό» των σταθερών όρων με τους αγνώστους και να γράψουμε

$$(19) \qquad [3 \quad -2 \quad 7] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3x + (-2)\,y + 7z = 3\,.$$

Γενικότερα, το γινόμενο ενός πίνακα-σειρά **A** διαστάσεων $1 \times n$ με έναν πίνακα-στήλη **B** διαστάσεων $n \times 1$ είναι ο πραγματικός αριθμός

$$(20) \qquad \mathbf{AB} = [A_{11} \quad A_{12} \ldots A_{1n}] \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{n1} \end{bmatrix} = A_{11}\,B_{11} + A_{12}\,B_{21} + \ldots + A_{1n}\,B_{n1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{1k}\,B_{k1}\,.$$

Για τις άλλες δύο γραμμικές εξισώσεις του συστήματος (2) έχουμε

$$(21) \qquad [5 \quad 1 \quad -2] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 5\,x + 1\,y + (-2)\,z = -1$$

$$(22) \qquad [-1 \quad 8 \quad 4] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-1)\,x + 8\,y + 4\,z = 2\,.$$

Με τη βοήθεια του παραπάνω ορισμού του γινομένου σειράς επί στήλη, μπορούμε να ορίσουμε το γινόμενο ενός πίνακα **A** διαστάσεων $n \times m$ με έναν πίνακα **B** διαστάσεων $m \times k$. Πρέπει εξαρχής να τονιστεί ότι το γινόμενο πινάκων ορίζεται μόνο όταν ο αριθμός m των στηλών του πρώτου είναι ίσος με τον αριθμό των σειρών του δευτέρου.

Το γινόμενο ενός $n \times m$ πίνακα **A** με έναν $m \times k$ πίνακα **B** είναι ο