ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Γ. ΔΑΣΚΑΛΟΠΟΥΛΟΥ
ΟΜ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ V

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Αριθμητικές και συναρτησιακές σειρές.
Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και συστήματα.
Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.
Μετασχηματισμοί Laplace και Fourier.

ΑΘΗΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ τόμος αὐτός, μέ κύριο ἀντικείμενο τίς Διαφορικές Ἐξισώσεις, εἶναι ἡ σταδιακή ἐξέλιξη ἑνός πονήματος πού ξεκίνησε περίπου πρίν ἀπό σαράντα χρόνια καί διαμορφώθηκε στή σημερινή του μορφή κατά τήν διάρκεια τῶν παραδόσεών μου στο Ε.Μ.Π καί στήν Πολυτεχνική Σχολή τοῦ ΑΠΘ.

Τό κείμενο διαιρεῖται σέ τέσσερα κεφάλαια: Τό πρῶτο εἶναι εἰσαγωγικό καί ἀναφέρεται κυρίως στίς Δυναμοσειρές καί Σειρές Fourier γιά μετέπειτα χρήση. Τό δεύτερο εἶναι τό ἐκτενέστερο καί ἀφορᾶ τό κύριο ἀντικείμενο τοῦ βιβλίου, πού εἶναι οἱ Συνήθεις Διαφορικές Ἐξισώσεις. Στό τρίτο κεφάλαιο δίνονται μερικά στοιχεῖα ἀπό τίς Μερικές Διαφορικές Ἐξισώσεις καί στό τέταρτο ἀναπτύσσεται κυρίως ἡ τεχνική τῶν μετασχηματισμῶν Laplace καί Fourier στήν ἐπίλυση εἰδικῶν μορφῶν Διαφορικῶν καί Ὁλοκληρωτικῶν Ἐξισώσεων, πού παρουσιάζονται συχνά στις ἐφαρμογές.

Κατά τήν γραφή τοῦ κειμένου ἔγινε προσπάθεια νά συμβαδίζει ἡ μαθηματική ἀκριβολογία μέ τήν λιτότητα τῆς παρουσιάσεως καί τήν σαφήνεια ἐννοιῶν, ὁρισμῶν καί ἀποδείξεων. Γιά τήν καλύτερη ἐμπέδωση τῆς ὕλης, κάθε κεφάλαιο χωρίζεται σέ ἐπί μέρους ἑνότητες, οἱ ὁποῖες ἀκολουθοῦνται ἀπό διευκρινιστικά παραδείγματα καί ἀσκήσεις. Στό τέλος κάθε κεφαλαίου ὑπάρχει μία περίληψη τῆς ὕλης πού ἀναπτύχθηκε καί πολλά παραδείγματα καί ἀσκήσεις ὑψηλοῦ ἐπιπέδου.

Τελειώνοντας, ἐπιθυμῶ νά εὐχαριστήσω τίς ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ γιά τήν ἐπιμέλεια της ἀνατυπώσεως καί τήν ἐν γένει φροντίδα παρουσιάσεως τοῦ βιβλίου αὐτοῦ.

Δ. ΔΑΣΚΑΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

ΣΕΙΡΕΣ

Ἀριθμητικές Σειρές

Σειρές μέ ὅρους μεταβλητούς

Δυναμοσειρές

Σειρές Fourier

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Γενική εἰσαγωγή

Διαφορικές ἐξισώσεις πρώτης τάξεως

Ἐξισώσεις ἀνωτέρας τάξεως

Γραμμικές ἐξισώσεις δευτέρας τάξεως

Γραμμικές ἐξισώσεις ἀνωτέρας τάξεως

Ὁλοκλήρωση μέ σειρά

Διαφορικά συστήματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Ἐξισώσεις πρώτης τάξεως

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Σειρές

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματευόμαστε τη θεωρία των σειρών. Αρχίζουμε με τη θεωρία των αριθμητικών σειρών και συνεχίζουμε με σειρές που οι όροι τους είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Απ' αυτές ιδιαίτερα θα αναπτύξουμε τη θεωρία των δυναμοσειρών και σειρών Fourier.

Ἀριθμητικές σειρές

1. Ὁρισμοί. Ἔστω ἡ ἀριθμητική ἀκολουθία:

(1.1) $$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots \quad .$$

Τό συμβολικό ἄθροισμα:

(1.2) $$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \alpha_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots$$

λέγεται ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ή σ ε ι ρ ά ἤ συντομότερα, ὅταν δέν ὑπάρχει κίνδυνος συγχύσεως, σ ε ι ρ ά.

Οἱ ὅροι καί ὁ γενικός ὅρος α_ν τῆς ἀκολουθίας (1.1) λέγονται ἀντίστοιχα ὅ ρ ο ι καί γ ε ν ι κ ό ς ὅ ρ ο ς τῆς σειρᾶς (1.2). Ἄν οἱ ὅροι μιᾶς σειρᾶς εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, ἡ σειρά λέγεται π ρ α γ μ α τ ι κ ή, ἄν δέ εἶναι μιγαδικοί, ἡ σειρά λέγεται μ ι γ α δ ι κ ή. Μέ μιγαδικές σειρές θά ἀσχοληθοῦμε μόνο στό ἐδάφιο 7.

Μία σειρά λέγεται θ ε τ ι κ ή (ά ρ ν η τ ι κ ή), ἀκριβῶς ὅταν ὅλοι οἱ ὅροι της εἶναι ἀριθμοί θετικοί (ἀρνητικοί), λέγεται δέ ἐ ν α λ λ ά σ σ ο υ σ α, ἀκριβῶς ὅταν οἱ ὅροι της εἶναι ἐναλλάξ θετικοί ἀρνητικοί. Π.χ. ἀπό τίς σειρές:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2+\ldots$$

$$(-1)+(-3)+(-5)+\ldots+(-2\nu-1)+\ldots$$

$$(-1)+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\ldots+(-1)^{\nu}\frac{1}{\nu}+\ldots$$

$$\eta\mu 1+\eta\mu 2+\ldots+\eta\mu\nu+\ldots$$

ἡ πρώτη εἶναι θετική, ἡ δεύτερη ἀρνητική, ἡ τρίτη ἐναλλάσουσα, ἡ δέ τελευταία δέν ἀνήκει σέ καμία ἀπό τίς κατηγορίες αὐτές.

2. Σύγκλιση σειρᾶς. Θεωροῦμε τή σειρά (1.2) καί τό ἄθροισμα τῶν ν- πρώτων ὅρων της:

(2.1) $$A_\nu \doteq \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu.$$

Ἡ σειρά λέγεται σ υ γ κ λ ί ν ο υ σ α ἤ ὅτι σ υ γ κ λ ί ν ε ι, ἀκριβῶς ὅταν ἡ ἀκολουθία μέ γενικό ὅρο A_ν συγλίνει, λέγεται δέ ἀ π ο κ λ ί ν ο υ σ α ἤ ὅτι ἀ π ο κ λ ί ν ε ι, ἀκριβῶς ὅταν ἡ ἀκολουθία αὐτή ἀποκλίνει.

Ἄν ἡ σειρά συγκλίνει, $A_\nu \to A$, ὁ ἀριθμός A λέγεται ἄ θ ρ ο ι σ μ α τῆς σειρᾶς καί γράφουμε:

(2.2) $$A=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu+\ldots\quad .$$

Ὁ ἀριθμός (2.1) λέγεται μ ε ρ ι κ ό ἄ θ ρ ο ι σ μ α ν-τάξεως καί ὁ ἀριθμός:

(2.3) $$R_\nu \doteq A-A_\nu=\alpha_{\nu+1}+\alpha_{\nu+2}+\ldots$$

λέγεται ὑ π ό λ ο ι π ο ν-τάξεως τάξεως τῆς συγκλίνουσας σειρᾶς (1.2).

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς συγκλίσεως σειρᾶς καί γνωστή ἰδιότητα τῶν ἀκολουθιῶν προκύπτει ἀμέσως ὅτι, ἄν σέ συγκλίνουσα σειρά διαγράψουμε ἤ ἐπισυνάψουμε ἕνα πεπερασμένο πλῆθος ὅρων, ἡ νέα σειρά εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα.

Παράδειγμα (2.1). Νά μελετηθεῖ ἀπό ἄποψη συγκλίσεως ἡ γεωμετρική σειρά μέ λόγο λ:

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^\nu + \ldots \quad .$$

Λύση. Ἄν εἶναι $\lambda \neq 1$, ἔχουμε:

$$A_\nu = \frac{1 - \lambda^\nu}{1 - \lambda} \; .$$

Γιά $|\lambda| < 1$ ἡ ἀκολουθία (A_ν) συγκλίνει:

$$\lim A_\nu = \lim \frac{1 - \lambda^\nu}{1 - \lambda} = \frac{1}{1 - \lambda} \, ,$$

ἐπομένως καί ἡ σειρά συγκλίνει. Γιά $|\lambda| > 1$ ἡ ἀκολουθία$(|A_\nu|)$ ἔχει ὅριο τό $+\infty$, ἐπομένως ἡ σειρά ἀποκλίνει. Γιά $\lambda = 1$ εἶναι $A_\nu = \nu \longrightarrow +\infty$, δηλ. ἡ σειρά ἀποκλίνει. Τέλος γιά $\lambda = -1$ εἶναι $A_\nu = 0$ ὅταν ν = ἄρτιος καί $A_\nu = 1$ ὅταν ν = περιττός, ἐπομένως ἡ ἀκολουθία (A_ν) δέν ἔχει ὅριο, δηλ. ἡ σειρά ἀποκλίνει.

Ἀπό τά προηγούμενα προκύπτει ὅτι ἡ γεωμετρική σειρά συγκλίνει μόνο ὅταν ὁ λόγος της εἶναι ἀπολύτως μικρότερος τῆς μονάδας.

3. Γενικές προτάσεις. Ἄν γιά τήν ἀκολουθία (A_ν) ἐφαρμόσουμε τό γενικό κριτήριο συγκλίσεως τοῦ Cauchy, προκύπτει ἡ ἀκόλουθη πρόταση, πού ἐκφράζει ἕνα ἀντίστοιχο κριτήριο συγκλίσεως γιά σειρές.

Πρόταση (3.1). Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά συγκλίνει ἡ σειρά (1.2) εἶναι γιά κάθε θετικό ἀριθμό ε νά ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός N, γενικά ἐξαρτόμενος ἀπό τόν ε τέτοιος, ὥστε γιά $\mu, \nu > N$ νά εἶναι

(3.1) $$|A_\mu - A_\nu| < \varepsilon .$$

Προφανῶς δύο ταυτόσημες διατυπώσεις τοῦ παραπάνω κριτηρίου εἶναι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ρ καί $\nu > N$ νά εἶναι:

(3.2) $$|A_{\nu+\rho} - A_\nu| < \varepsilon$$

ἤ πού εἶναι τό ἴδιο γιά $\nu \to +\infty$ νά εἶναι:

(3.3) $$\lim(A_{\nu+\rho} - A_\nu) = 0.$$

Πρόταση (3.2). Ὁ γενικός ὅρος α_ν κάθε συγκλίνουσας σειρᾶς τείνει στό μηδέν ὅταν $\nu \to +\infty$.

Ἀπόδειξη. Ἐφαρμόζουμε τό προηγούμενο κριτήριο μέ τή διατύπωση (3.3) γιά ρ = 1, ὁπότε ἔχουμε τό ζητούμενο:

$$A_{\nu+1} - A_\nu = \alpha_{\nu+1} \longrightarrow 0 .$$

Ἡ συνθήκη, ὁ ν-στός ὅρος νά τείνει στό μηδέν, εἶναι συνθήκη ἀναγκαία ἀλλά ὄχι καί ἱκανή, ὅπως φαίνεται ἀπό τό ἑξῆς ἀντιπαράδειγμα:

Παράδειγμα (3.1). Νά ἐξεταστεῖ ἄν συγκλίνει ἡ ἁρμονική σειρά:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu} + \ldots \quad .$$

Λύση. Γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἔχουμε:

$$A_{2\nu} - A_\nu = \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \ldots + \frac{1}{2\nu} \geqq \nu \cdot \frac{1}{2\nu} = \frac{1}{2} \cdot$$

Ἄν ἡ σειρά εἶναι συγκλίνουσα, πρέπει, κατά τόν τύπο (3.3), γιά ρ = ν νά εἶναι $A_{2\nu} - A_\nu \to 0$, τό ὁποῖο δέν εἶναι δυνατό νά συμβαίνει, ἕνεκα τῆς προηγούμενης ἀνισότητας. Ἐπομένως ἡ σειρά ἀποκλίνει, παρ' ὅλο ὅτι $1/\nu \to 0$.