

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Γ. ΔΑΣΚΑΛΟΠΟΥΛΟΥ
ΟΜ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ V

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

*Αριθμητικές και συναρτησιακές σειρές.
Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και συστήματα.
Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.
Μετασχηματισμοί Laplace και Fourier.*

ΑΘΗΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο τόμος αυτός, μέ κύριο αντικείμενο τίς Διαφορικές Ξξισώσεις, είναι ή σταδιακή εξέλιξη ενός πονήματος πού ξεκίνησε περίπου πρίν από σαράντα χρόνια καί διαμορφώθηκε στή σημερινή του μορφή κατά τήν διάρκεια τών παραδόσεών μου στο Ε.Μ.Π καί στήν Πολυτεχνική Σχολή του ΑΠΘ.

Τό κείμενο διαιρείται σέ τέσσερα κεφάλαια: Τό πρώτο είναι εισαγωγικό καί αναφέρεται κυρίως στίς Δυναμοσειρές καί Σειρές Fourier γιά μετέπειτα χρήση. Τό δεύτερο είναι τό έκτενέστερο καί άφορά τό κύριο αντικείμενο του βιβλίου, πού είναι οί Συνήθεις Διαφορικές Ξξισώσεις. Στο τρίτο κεφάλαιο δίνονται μερικά στοιχεία από τίς Μερικές Διαφορικές Ξξισώσεις καί στό τέταρτο αναπτύσσεται κυρίως ή τεχνική τών μετασχηματισμών Laplace καί Fourier στήν επίλυση ειδικών μορφών Διαφορικών καί Όλοκληρωτικών Ξξισώσεων, πού παρουσιάζονται συχνά στις εφαρμογές.

Κατά τήν γραφή του κειμένου έγινε προσπάθεια νά συμβαδίζει ή μαθηματική άκριβολογία μέ τήν λιτότητα της παρουσιάσεως καί τήν σαφήνεια έννοιών, όρισμών καί άποδείξεων. Γιά τήν καλύτερη έμπέδωση της ύλης, κάθε κεφάλαιο χωρίζεται σέ επί μέρους ένότητες, οί όποιες ακολουθοῦνται από διευκρινιστικά παραδείγματα καί άσκήσεις. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχει μία περίληψη της ύλης πού αναπτύχθηκε καί πολλά παραδείγματα καί άσκήσεις ύψηλου επιπέδου.

Τελειώνοντας, επιθυμώ νά εύχαριστήσω τίς ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ γιά τήν επιμέλεια της άνατυπώσεως καί τήν έν γένει φροντίδα παρουσιάσεως του βιβλίου αυτού.

Δ. ΔΑΣΚΑΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΣΕΙΡΕΣ

Αριθμητικές Σειρές

1.	Όρισμοί.....	11
2.	Σύγκλιση σειράς.....	12
3.	Γενικές προτάσεις.....	13
4.	Ήμισυγκλίνουσες σειρές.....	29
5.	Πράξεις με σειρές.....	35
6.	Υπολογισμός του άθροίσματος σειράς.....	40
7.	Μιγαδικές σειρές.....	44
	Άσκησης.....	45

Σειρές με όρους μεταβλητούς

8.	Όρισμοί.....	51
9.	Όμοιόμορφα συγκλίνουσες σειρές.....	52
10.	Βασικές προτάσεις.....	55
	Άσκησης.....	61

Δυναμοσειρές

11.	Όρισμός και σύγκλιση.....	62
12.	Βασικές ιδιότητες.....	66
13.	Ανάπτυγμα συναρτήσεως σε δύναμοσειρά.....	68
14.	Αναπτύγματα βασικών συναρτήσεων.....	71
15.	Τύποι του Euler.....	78
	Άσκησης.....	79

Σειρές Fourier

16.	Είσαγωγή.....	83
17.	Τριγωνομετρικές σειρές.....	85
18.	Άνάπτυγμα κατά Fourier.....	86
19.	Μιγαδική μορφή.....	99
20.	Προσεγγιστική μορφή.....	101
	Άσκήσεις.....	103
21.	Άνακεφαλαίωση.....	106
22.	Γενικά παραδείγματα.....	108
	Γενικές ασκήσεις.....	125

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Γενική εισαγωγή

23.	Όρισμοί.....	139
24.	Όλοκλήρωμα διαφορικής εξίσωσης.....	140
25.	Μόρφωση διαφορικής εξίσωσης.....	141
26.	Γενικό μερικό και ιδιαίζον ολοκλήρωμα.....	144
27.	Γραφική ολοκλήρωση.....	145
	Άσκήσεις.....	149

Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

28.	Εξισώσεις άμέσως ολοκληρώσιμες.....	150
29.	Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών.....	152
30.	Εξισώσεις όμογενείς.....	153
31.	Εξισώσεις πού άνάγονται σέ όμογενείς.....	157
32.	Εξισώσεις γραμμικές.....	161
33.	Εξισώσεις Bernoulli.....	164
34.	Εξισώσεις Riccati.....	167
35.	Εξισώσεις Lagrange.....	176
36.	Εξισώσεις Clairaut.....	180
37.	Εξισώσεις έπιλύσιμες ως πρός τήν παράγωγο.....	183
38.	Εξισώσεις τής μορφής $F(x, y') = 0$	185

39.	Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $F(y, y') = 0$	186
40.	Ἐξισώσεις ὁμογενεῖς.....	188
41.	Παράγοντας ὀλοκληρώσεως.....	190
42.	Ἰδιόζουσες λύσεις.....	202
43.	Ἴσογώνιες τροχιές.....	209
44.	Θεώρημα ὑπάρξεως.....	214
45.	Προσεγγιστικές μέθοδοι ἐπιλύσεως.....	223
	Ἀσκήσεις.....	229

Ἐξισώσεις ἀνωτέρας τάξεως

46.	Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $y^{(v)} = \sigma(x)$	240
47.	Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $F(x, y^{(\mu)}, y^{(\mu+1)}, \dots, y^{(v)}) = 0$ ($0 < \mu < v$).....	242
48.	Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $F(y, y', y'', \dots, y^{(v)}) = 0$	245
49.	Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $F(x, y'/y, y''/y, \dots, y^{(v)}/y) = 0$	249
50.	Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $F(y, xy', x^2y'', \dots, x^v y^{(v)}) = 0$	251
51.	Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $F(y/x, y', xy'', \dots, x^{v-1} y^{(v)}) = 0$	254
52.	Θεώρημα ὑπάρξεως.....	257
53.	Τέλειες διαφορικές ἐξισώσεις.....	259
54.	Γραφικὴ ὀλοκλήρωση.....	263
	Ἀσκήσεις.....	265

Γραμμικὲς ἐξισώσεις δευτέρας τάξεως

55.	Ὁρισμοί.....	267
56.	Βασικὲς προτάσεις.....	270
57.	Ἐπίλυση ὁμογενῶν ἐξισώσεων.....	278
58.	Ἐξισώσεις ὁμογενεῖς μὲ σταθεροῦς συντελεστές.....	282
59.	Ἐξισώσεις Euler.....	285
60.	Ἐπίλυση μὴ ὁμογενῶν ἐξισώσεων.....	287
61.	Δεύτερο μέλος εἰδικῆς μορφῆς.....	296
62.	Δεύτερο μέλος μὲ γενικότερη μορφή.....	301
63.	Μὴ ὁμογενῆς Euler.....	305
	Ἀσκήσεις.....	307

Γραμμικές εξισώσεις ανωτέρας τάξεως

64.	Όρισμοί.....	315
65.	Βασικές προτάσεις.....	317
66.	Έπιλυση όμογενών εξισώσεων.....	320
67.	Έπιλυση μή όμογενών εξισώσεων.....	325
68.	Διαφορικοί τελεστές.....	332
	Άσκήσεις.....	343

Όλοκλήρωση με σειρά

69.	Γενική μέθοδος.....	347
70.	Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών.....	357
71.	Έξισώσεις Bessel.....	367
72.	Έξισωση Legendre.....	378
	Άσκήσεις.....	383

Διαφορικά συστήματα

73.	Είσαγωγή.....	384
74.	Όλοκλήρωση με πρώτες λύσεις.....	396
75.	Γραμμικά συστήματα.....	403
76.	Μέθοδος του d'Alembert.....	407
77.	Γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές.....	412
78.	Όλοκλήρωση συστημάτων με σειρά.....	419
	Άσκήσεις.....	422
79.	Ανακεφαλαίωση.....	425
80.	Γενικά παραδείγματα.....	428
	Γενικές ασκήσεις.....	461

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Έξισώσεις πρώτης τάξεως

81.	Είσαγωγή.....	486
82.	Ήμιγραμμικές εξισώσεις.....	493
83.	Έξισώσεις Pfaff.....	499

84.	Γενική μορφή.....	504
	Άσκήσεις.....	509

Εξισώσεις δευτέρας τάξεως

85.	Ταξινόμηση κατά τύπους.....	512
86.	Μία μερική περίπτωση.....	519
87.	Μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών.....	522
	Άσκήσεις.....	535

Πρόβλημα Sturm Liouville

88.	Όρισμοί.....	537
89.	Βασικές ιδιότητες.....	549
90.	Ιδιάζοντα προβλήματα.....	554
	Άσκήσεις.....	556
91.	Ανακεφαλαίωση.....	557
92.	Γενικά παραδείγματα.....	558
	Γενικές ασκήσεις.....	575

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Μετασχηματισμός Laplace

93.	Όρισμοί.....	581
94.	Σύγκλιση του ολοκληρώματος Laplace.....	586
95.	Βασικές ιδιότητες.....	592
96.	Ο αντίστροφος του μετασχηματισμού Laplace.....	609
97.	Εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace.....	620
98.	Ιστορικό σημείωμα.....	636

Μετασχηματισμός Fourier

99.	Όλοκλήρωμα Fourier.....	641
100.	Βασικές ιδιότητες.....	651

101.	Συνέλιξη.....	659
102.	Ίσότητα τοῦ Parseval.....	664
	Ἀσκήσεις.....	667
103.	Ἀνακεφαλαίωση.....	668
104.	Γενικά παραδείγματα.....	671
	Γενικές ἀσκήσεις.....	684
	Ἀπαντήσεις τῶν ἀσκήσεων.....	697

Σειρές

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματευόμαστε τη θεωρία των σειρών. Αρχίζουμε με τη θεωρία των αριθμητικών σειρών και συνεχίζουμε με σειρές που οι όροι τους είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Απ' αυτές ιδιαίτερα θα αναπτύξουμε τη θεωρία των δυναμοσειρών και σειρών Fourier.

Αριθμητικές σειρές

1. Όρισμοί. Έστω η αριθμητική ακολουθία:

$$(1.1) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

Τό συμβολικό άθροισμα:

$$(1.2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$$

λέγεται **αριθμητική σειρά** ή συντομότερα, όταν δέν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως, **σειρά**.

Οι όροι καί ο γενικός όρος α_n της ακολουθίας (1.1) λέγονται αντίστοιχα **όροι** καί **γενικός όρος** της σειράς (1.2). Αν οι όροι μιας σειράς είναι πραγματικοί αριθμοί, ή σειρά λέγεται **πραγματική**, αν δέ είναι μιγαδικοί, ή σειρά λέγεται **μιγαδική**. Μέ μιγαδικές σειρές θά ασχοληθούμε μόνο στό έδάφιο 7.

Μία σειρά λέγεται **θετική** (άρνητική), ακριβώς όταν όλοι οι όροι της είναι αριθμοί θετικοί (άρνητικοί), λέγεται δέ **έναλλάσσοσα**, ακριβώς όταν οι όροι της είναι έναλλάξ θετικοί άρνητικοί. Π.χ. από τις σειρές:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \dots$$

$$(-1) + (-3) + (-5) + \dots + (-2n - 1) + \dots$$

$$(-1) + \frac{1}{2} + (-\frac{1}{3}) + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$$

$$\eta\mu 1 + \eta\mu 2 + \dots + \eta\mu n + \dots$$

ή πρώτη είναι θετική, ή δεύτερη άρνητική, ή τρίτη έναλλάσσοσα, ή δέ τελευταία δέν ανήκει σέ καμία από τις κατηγορίες αυτές.

2. Σύγκλιση σειράς. Θεωρούμε τή σειρά (1.2) καί τό άθροισμα τών n - πρώτων όρων της:

$$(2.1) \quad A_n \doteq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Η σειρά λέγεται **συγκλίνοσα** ή **ότι συγκλίνει**, ακριβώς όταν ή άκολουθία μέ γενικό όρο A_n συγκλίνει, λέγεται δέ **άποκλίνοσα** ή **ότι άποκλίνει**, ακριβώς όταν ή άκολουθία αυτή άποκλίνει.

Αν ή σειρά συγκλίνει, $A_n \rightarrow A$, ό αριθμός A λέγεται **άθροισμα** τής σειράς καί γράφουμε:

$$(2.2) \quad A = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$$

Ο αριθμός (2.1) λέγεται **μερικό άθροισμα** n -τάξεως καί ό αριθμός:

$$(2.3) \quad R_n \doteq A - A_n = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots$$

λέγεται ὁ π ὁ λ ο ι π ὀ n -τάξεως τάξεως τῆς συγκλίνουσας σειράς (1.2).

Ἀπό τόν ὀρισμό τῆς συγκλίσεως σειράς καί γνωστή ιδιότητα τῶν ἀκολουθιῶν προκύπτει ἀμέσως ὅτι, ἂν σέ συγκλίνουσα σειρά διαγράψουμε ἢ ἐπισυνάψουμε ἕνα πεπερασμένο πλήθος ὀρων, ἡ νέα σειρά εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα.

Παράδειγμα (2.1). Νά μελετηθεῖ ἀπό ἄποψη συγκλίσεως ἡ γεωμετρική σειρά μέ λόγο λ :

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n + \dots$$

Λύση. Ἄν εἶναι $\lambda \neq 1$, ἔχουμε:

$$A_n = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}.$$

Γιά $|\lambda| < 1$ ἡ ἀκολουθία (A_n) συγκλίνει:

$$\lim A_n = \lim \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} = \frac{1}{1 - \lambda},$$

ἐπομένως καί ἡ σειρά συγκλίνει. Γιά $|\lambda| > 1$ ἡ ἀκολουθία $(|A_n|)$ ἔχει ὀριο τό $+\infty$, ἐπομένως ἡ σειρά ἀποκλίνει. Γιά $\lambda = 1$ εἶναι $A_n = n \rightarrow +\infty$, δηλ. ἡ σειρά ἀποκλίνει. Τέλος γιά $\lambda = -1$ εἶναι $A_n = 0$ ὅταν $n = \text{ἄρτιος}$ καί $A_n = 1$ ὅταν $n = \text{περιττός}$, ἐπομένως ἡ ἀκολουθία (A_n) δέν ἔχει ὀριο, δηλ. ἡ σειρά ἀποκλίνει.

Ἀπό τά προηγούμενα προκύπτει ὅτι ἡ γεωμετρική σειρά συγκλίνει μόνο ὅταν ὁ λόγος τῆς εἶναι ἀπολύτως μικρότερος τῆς μονάδας.

3. Γενικές προτάσεις. Ἄν γιά τήν ἀκολουθία (A_n) ἐφαρμόσουμε τό γενικό κριτήριο συγκλίσεως τοῦ Cauchy, προκύπτει ἡ ἀκόλουθη πρόταση, πού ἐκφράζει ἕνα ἀντίστοιχο κριτήριο συγκλίσεως γιά σειρές.

Πρόταση (3.1). Ἀναγκαῖα καί ἰκανή συνθήκη γιά νά συγκλίνει ἡ σειρά (1.2) εἶναι γιά κάθε θετικό ἀριθμό ε νά ὑπάρχει φυ-

σικός αριθμός N , γενικά εξαρτώμενος από τον ε τέτοιος, ώστε για $\mu, \nu > N$ να είναι

$$(3.1) \quad |A_\mu - A_\nu| < \varepsilon.$$

Προφανώς δύο ταυτόσημες διατυπώσεις του παραπάνω κριτηρίου είναι για κάθε φυσικό αριθμό ρ και $\nu > N$ να είναι:

$$(3.2) \quad |A_{\nu+\rho} - A_\nu| < \varepsilon$$

ή που είναι το ίδιο για $\nu \rightarrow +\infty$ να είναι:

$$(3.3) \quad \lim(A_{\nu+\rho} - A_\nu) = 0.$$

Πρόταση (3.2). Ο γενικός όρος a_n κάθε συγκλίνουσας σειράς τείνει στο μηδέν όταν $n \rightarrow +\infty$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο κριτήριο με τη διατύπωση (3.3) για $\rho = 1$, οπότε έχουμε το ζητούμενο:

$$A_{\nu+1} - A_\nu = a_{\nu+1} \rightarrow 0.$$

Η συνθήκη, ο n -στός όρος να τείνει στο μηδέν, είναι συνθήκη αναγκαία αλλά όχι και ικανή, όπως φαίνεται από το εξής αντί-παράδειγμα:

Παράδειγμα (3.1). Νά εξεταστεί αν συγκλίνει ή αρμονική σειρά:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\nu} + \dots$$

Λύση. Για κάθε φυσικό αριθμό ν έχουμε:

$$A_{2\nu} - A_\nu = \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \dots + \frac{1}{2\nu} \geq \nu \cdot \frac{1}{2\nu} = \frac{1}{2}.$$

Αν η σειρά είναι συγκλίνουσα, πρέπει, κατά τον τύπο (3.3), για $\rho = \nu$ να είναι $A_{2\nu} - A_\nu \rightarrow 0$, το οποίο δεν είναι δυνατό να συμβαίνει, ένεκα της προηγούμενης ανισότητας. Επομένως η σειρά αποκλίνει παρ' όλο ότι $1/\nu \rightarrow 0$.