ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Γ. ΔΑΣΚΑΛΟΠΟΥΛΟΥ
ΟΜ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ III

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός δύο και περισσοτέρων μεταβλητών.
Διανυσματική Ανάλυση.

ΑΘΗΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό κυκλοφορεί, σε διάφορες μορφές και εκδόσεις, συνεχώς επί σαράντα χρόνια. Το περιεχόμενό του αναφέρεται στο Λογισμό Πολλών Μεταβλητών, που αποτελεί μέρος του μαθήματος με γενικό τίτλο ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ· και το οποίον διδάσκεται στα δύο πρώτα έτη σπουδών του ΕΜΠ και των άλλων Πολυτεχνικών Σχολών της χώρας.

Το πρώτο κεφάλαιο, μετά από μια σύντομη εισαγωγή στην ***τοπολογία*** *του Ευκλειδείου χώρου* $\mathbb{R}^\nu$, *περιλαμβάνει το Διαφορικό Λογισμό συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Ιδιαίτερη έμφαση και πληρότητα έχει δοθεί στην θεωρία των Τοπικών Ακροτάτων, λόγω της σημασίας που έχει σε διάφορες επιστημονικές περιοχές, όπως επίσης και για τις πρακτικές εφαρμογές της.*

Το δεύτερο κεφάλαιο αρχίζει με τις εντελώς απαραίτητες για τα επόμενα γνώσεις που αφορούν τις καμπύλες και επιφάνειες· συνεχίζει δε με το κύριο αντικείμενο, που είναι ο Ολοκληρωτικός Λογισμός συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

Το τρίτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στη Διανυσματική Ανάλυση, που αποτελεί το μαθηματικό εργαλείο πολλών περιοχών των Φυσικών και Τεχνικών Επιστημών. Ακριβώς για το λόγο αυτό έχουμε δώσει μια ιδιαίτερη προσοχή στη σύμμετρη ανάπτυξη Θεωρίας και Εφαρμογών.

Η Διαφορική Γεωμετρία, που σε προηγούμενες εκδόσεις αποτελούσε ένα τέταρτο χωριστό κεφάλαιο, θεωρήσαμε σκόπιμο μαζί με τον Τανυστικό Λογισμό να αποτελέσουν ένα ιδιαίτερο τόμο, ο οποίος ήδη κυκλοφορεί με τον τίτλο ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IV.

Κατά την παρουσίαση των διαφόρων γνωστικών αντικειμένων προσπαθήσαμε να συνδυάσουμε τη μαθηματική ακριβολογία με την σαφήνεια και τη λιτή διατύπωση. Επί πλέον, για να βοηθήσουμε τον αναγνώση στην κατανόηση των εννοιών και στην εμπέδωση των γνώσεων, παραθέσαμε μετά από κάθε εδάφιο και κεφάλαιο πολλά παραδείγματα και εφαρμογές, όπως επίστης πολυάριθμες ασκήσεις με απαντήσεις.

Ελπίζουμε ότι και η νέα αυτή έκδοση θα αποτελέσει ένα χρήσιμο βοήθημα για τους φοιτητές των Πολυτεχνείων και Πανεπιστημίων, όπως επίσης και για κάθε ασχολούμενο με τα Ανώτερα Μαθηματικά.

Δ. Γ. Δασκαλόπουλος
Φεβρουάριος 1997

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο I

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Κεφάλαιο II

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Κεφάλαιο III

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί γενίκευση του αντίστοιχου κεφαλαίου για συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Για το λόγο αυτό, ο αναγνώστης δεν έχει να αντιμετωπίσει εννοιολογικές δυσκολίες, αφού ουσιαστικά οι περισσότερες των εννοιών που εμφανίζονται είναι ήδη γνωστές από το Διαφορικό Λογισμό μιας μεταβλητής.

Στα πρώτα εδάφια δίδουμε τα στοιχεία της τοπολογίας του χώρου $\mathbb{R}^\nu$. Ακολουθούν οι έννοιες του ορίου και της συνέχειας για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, η τεχνική της μερικής παραγωγίσεως, η θεωρία των πλεγμένων συναρτήσεων και τέλος η θεωρία των ακροτάτων.

1. Ο ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ $\mathbb{R}^\nu$. Το συνολοθεωρητικό υπόβαθρο αυτών που θα αναπτύξουμε τόσο στο κεφάλαιο αυτό όσο και στα επόμενα είναι ο ν-διάστατος Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^\nu$ με την **συνήθη**, όπως λέμε, **μετρική**. Σύμφωνα με αυτήν, η **απόσταση** δύο σημείων $x=(x_1,\dots,x_\nu)$ και $y=(y_1,\dots,y_\nu)$ του χώρου αυτού ορίζεται από τον τύπο:

$$(1.1)\qquad |x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_\nu-y_\nu)^2}.$$

Στο εξής, οι όροι **σημείο** ή **σύνολο**, χωρίς κανένα άλλο χαρακτηρισμό, θα σημαίνουν αντίστοιχα στοιχείο ή υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^\nu$.

Βάσει της αποστάσεως (1.1), ορίζουμε τη **διάμετρο** $d(A)$ ενός μη κενού συνόλου A ίση με το άνω πέρας του συνόλου των αποστάσεων των σημείων αυτού:

$$(1.2)\qquad d(A) \doteq \sup\{|x-y| : x,y\in A\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Έτσι, η διάμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με τη διαγώνιό του και μιας σφαίρας ισούται με τη διάμετρο, όπως αυτή ορίζεται στη στοιχειώδη γεωμετρία. Η διάμετρος του υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τις ανισότητες $0 < x_1 \leqq 2$, $x_2 > 0$ είναι $+\infty$.

Ένα σύνολο A λέγεται **φραγμένο**, ακριβώς όταν το σύνολο των αποστάσεων $|x-\alpha|$ των σημείων του A από ένα σταθερό σημείο α είναι φραγμένο. Είναι μια εύκολη άσκηση για τον αναγνώστη να δείξει ότι, ένα σύνολο A είναι φραγμένο, ακριβώς όταν $d(A) < +\infty$.

Βάσει της αποστάσεως (1.1), ορίζουμε ακόμα την **απόσταση** $d(\alpha,A)$ σημείου α από ένα μη κενό σύνολο A και την **απόσταση** $d(A,B)$ δύο μη κενών συνόλων A,B, αντίστοιχα από τους τύπους:

$$(1.3) \qquad \begin{cases} d(\alpha,A) \doteqdot \inf\{|\alpha-x| : x \in A\} \\ d(A,B) \doteqdot \inf\{|x-y| : x \in A \wedge y \in B\}. \end{cases}$$

Έτσι, η απόσταση σημείου από ευθεία ή επίπεδο ισούται αντίστοιχα με την απόσταση, όπως αυτή ορίζεται στη στοιχειώδη γεωμετρία. Στον $\mathbb{R}^3$, η απόσταση δύο εφαπτομένων σφαιρών είναι μηδέν, η δε απόσταση δύο ομοκέντρων σφαιρών ισούται με τη διαφορά των ακτίνων τους. Η απόσταση μιας σφαίρας και ενός επιπέδου, χωρίς κοινά σημεία, ισούται με την απόσταση των σημείων Λ,Μ, όπου Μ η ορθή προβολή του κέντρου Κ της σφαίρας στο επίπεδο και Λ η τομή της σφαίρας με το ΚΡ.

Αν $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu)$ είναι ένα σταθερό σημείο και $\rho,\rho_1,\ldots,\rho_\nu$ είναι θετικοί αριθμοί, τότε το σύνολο των σημείων $x=(x_1,\ldots,x_\nu)$ που ορίζεται από την πρώτη των ανισοτήτων:

$$(1.4) \qquad \begin{cases} |x-\alpha| = \sqrt{(x_1-\alpha_1)^2+\ldots+(x_\nu-\alpha_\nu)^2} < \rho \\ \alpha_i-\rho_i < x_i < \alpha_i+\rho_i \qquad (i=1,2,\ldots,\nu) \end{cases}$$

λέγεται **ανοικτή σφαίρα** με κέντρο α και ακτίνα ρ. Το σημειοσύνολο που ορίζεται από τις άλλες ν ανισότητες λέγεται **ανοικτό ορθογώνιο** με κέντρο α και ακμές $2\rho_1,\ldots,2\rho_\nu$. Σημειώνουμε, για μετέπειτα χρήση, ότι το ανοικτό αυτό ορθογώνιο είναι υπερσύνολο της ανοικτής σφαίρας με κέντρο α και ακτίνα $\rho=\min(\rho_1,\ldots,\rho_\nu)$ και υποσύνολο της ανοικτής σφαίρας με κέντρο α και ακτίνα $\rho=\sqrt{\rho_1^2+\ldots+\rho_\nu^2}$. Αν στις ανισότητες (1.4) αντικαταστήσουμε το σύμβολο $<$ με το σύμβολο $\leq$, τότε τα σημειοσύνολα που ορίζονται απ'αυτές λέγονται αντίστοιχα **κλειστή σφαίρα** και **κλειστό ορθογώνιο**. Ένα ανοικτό ορθογώνιο με ίσες ακμές λέγεται **ανοικτός κύβος**, όταν δε το ορθογώνιο είναι κλειστό, λέγεται **κλειστός κύβος**. Η ανοικτή σφαίρα που ορίζεται από την πρώτη των ανισοτήτων (1.4), στο χώρο $\mathbb{R}^1 \doteqdot \mathbb{R}$ ταυτίζεται με το γραμμικό ανοικτό διάστημα που έχει κέντρο α_1 και πλάτος 2ρ. Στο χώρο $\mathbb{R}^2$ ταυτίζεται με το εσωτερικό ενός κύκλου που έχει κέντρο το σημείο (α_1,α_2) και ακτίνα ρ. Στο χώρο $\mathbb{R}^3$ ταυτίζεται με τη σφαίρα που έχει κέντρο το σημείο $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ και ακτίνα ρ. Το ανοικτό ορθογώνιο που ορίζεται από τις άλλες ανισότητες του τύπου (1.4), στο χώρο $\mathbb{R}^1$ ταυτίζεται με το γραμμικό ανοικτό διάστημα που έχει κέντρο α_1 και πλάτος $2\rho_1$. Στο χώρο $\mathbb{R}^2$ ταυτίζεται με το εσωτερικό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει κέντρο το σημείο (α_1,α_2) και πλευρές παράλληλες αντίστοιχα στους άξονες των συντεταγμένων μήκους $2\rho_1, 2\rho_2$. Στο χώρο $\mathbb{R}^3$ ταυτίζεται με το εσωτερικό του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που έχει κέντρο το σημείο $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, έδρες παράλληλες αντίστοιχα στα συντεταγμένα επίπεδα και ακμές $2\rho_1, 2\rho_2, 2\rho_3$. Ανάλογα ισχύουν για την κλειστή σφαίρα και το κλειστό ορθογώνιο. Ένα ορθογώνιο ανοικτό ή κλειστό λέγεται επίσης **διάστημα** αντίστοιχα ανοικτό ή κλειστό. Αλλάζοντας λίγο τους συμβολισμούς, δηλαδή παριστάνοντας με α_i το $\alpha_i-\rho_i$ και με β_i το $\alpha_i+\rho_i$, και θέτοντας $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu)$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_\nu)$, ένα ανοικτό διάστημα θα το παριστάνουμε με το σύμβολο (α,β) και ένα κλειστό με το σύμβολο $[\alpha,\beta]$. Αν για κάποιο δείκτη i είναι $\alpha_i=\beta_i$, τότε το διάστημα λέγεται **εκφυλισμένο**. Τα σημεία α,β λέγονται πάλι **άκρα** του διαστήματος. Το κέντρο του είναι τώρα το σημείο κ με συντεταγμένες $\kappa_i=\frac{1}{2}(\alpha_i+\beta_i)$. Ένα ανοικτό ή κλειστό διάστημα γράφονται και ως καρτεσιανά γινόμενα γραμμικών διαστημάτων αντίστοιχα ως εξής:

$$(1.5)\qquad \begin{aligned}(\alpha,\beta)&=(\alpha_1,\beta_1)\times\ldots\times(\alpha_\nu,\beta_\nu)\\ [\alpha,\beta]&=[\alpha_1,\beta_1]\times\ldots\times[\alpha_\nu,\beta_\nu]\end{aligned}$$

Παράδειγμα (1.1). Θεωρούμε το σύνολο A_ν των σημείων $(x_1,\ldots,x_\nu)$

του χώρου $\mathbb{R}^\nu$ που ορίζεται από την ανισότητα:

$$|x_1-\alpha_1|+|x_2-\alpha_2|+\ldots+|x_\nu-\alpha_\nu| < \rho.$$

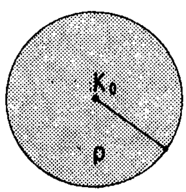
Προφανώς, A_1 είναι το γραμμικό ανοικτό διάστημα με κέντρο α_1 και πλάτος 2ρ. Με περιπτωσιολογία ως προς το πρόσημο των διαφορών $x_i-\alpha_i$ και λαμβάνοντας υπόψη τα γνωστά από την αναλυτική γεωμετρία περί θετικών και αρνητικών ημιεπιπέδων ως προς ευθεία, βλέπουμε ότι A_2 είναι το σύνολο των εσωτερικών σημείων του τετραγώνου με κέντρο (α_1,α_2), πλευρά $\rho\sqrt{2}$, απόστημα $\rho/\sqrt{2}$ και διαγώνιες μήκους 2ρ αντίστοιχα παράλληλες προς τους άξονες. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε, ότι A_3 είναι το σύνολο των εσωτερικών σημείων του κανονικού οκταέδρου με κέντρο $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ και απόστημα $\rho/\sqrt{3}$.

2. ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΗΜΕΙΟΥ. Μια ανοικτή σφαίρα με κέντρο α και ακτίνα ρ θα την ονομάζουμε **σφαιρική περιοχή** του α και θα την παριστάνουμε με το σύμβολο $\tilde{\omega}(\alpha,\rho)$. Κάθε υπερσύνολο μιας σφαιρικής περιοχής σημείου α, λέγεται **περιοχή** του α και θα την παριστάνουμε με το σύμβολο $\tilde{\omega}(\alpha)$. Αν από μια τέτοια περιοχή εξαιρέσουμε το σημείο α, το σύνολο που προκύπτει λέγεται **διάτρητη** περιοχή και θα την παριστάνουμε με το σύμβολο $\mathring{\tilde{\omega}}(\alpha)$. Σύμφωνα λοιπόν με τα προηγούμενα, κάθε κλειστή σφαίρα όπως επίσης κάθε κλειστό ή ανοικτό ορθογώνιο με κέντρο ένα σημείο α, είναι περιοχές του σημείου αυτού. Ένα ανοικτό ορθογώνιο με κέντρο α θα το ονομάζουμε **ορθογωνιακή** περιοχή του α και ένα ανοικτό κύβο με κέντρο το α **κυβική** περιοχή του α. Λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε σφαιρική περιοχή περιέχει μια ορθογωνιακή και αντίστροφα, συμπεραίνουμε ότι μια ιδιότητα η οποία ισχύει για κάθε σημείο μιας σφαιρικής περιοχής σημείου α, ισχύει επίσης και για κάθε σημείο μιας, κατάλληλης φυσικά, ορθογωνιακής ή κυβικής περιοχής του α και αντίστροφα. Από την άποψη αυτή είναι λοιπόν αδιάφορο, αν θα χρησιμοποιούμε σφαιρική, ορθογωνιακή ή κυβική περιοχή.

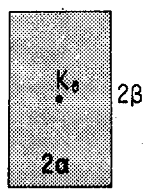
Για μετέπειτα χρήση στον ορισμό του ορίου συναρτήσεως, ορίζουμε ως **σφαιρική** περιοχή του **επάπειρον σημείου** ∞ του χώρου $\mathbb{R}^\nu$, το εξωτερικό μιας σφαίρας με κέντρο την αρχή. Δηλαδή αν $\rho > 0$, τότε μια σφαιρική περιοχή του ∞ ορίζεται από την ανισότητα $|x|>\rho$. Κάθε υπερσύνολο μιας σφαιρικής περιοχής του ∞ λέγεται **περιοχή** αυτού. Έτσι, αν είναι $\delta_1>0,\ldots,\delta_\nu>0$, τότε οι ανισότητες $|x_1|>\delta_1,\ldots,|x_\nu|>\delta_\nu$ ορίζουν προφανώς μια περιοχή του ∞, η οποία μάλιστα λέγεται **ορθογωνιακή** περιοχή αυτού. Το ∞ λέγεται επίσης το **κατεκδοχήν** σημείο του $\mathbb{R}^\nu$· τα σημεία του $\mathbb{R}^\nu$ λέγονται **καθυπόστασιν.** Ας δούμε πάλι τί σημαίνουν τα προηγούμενα στους χώρους $\mathbb{R}^\nu(\nu=2,3)$ στους οποίους συνήθως θα εργαστούμε: Αναφέροντας αυτούς, σχεδόν πάντοτε, σε καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων και χρησιμοποιώντας τους συνήθεις συμβολισμούς για τους χώρους αυτούς, στο χώρο $\mathbb{R}^2$ η ρ-σφαιρική περιοχή ενός σημείου $K_0(x_0,y_0)$ ορίζεται από την πρώτη των ανισοτήτων:

$$(2.1)\qquad \begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\rho^2 \\ x_0-\alpha<x<x_0+\alpha,\ y_0-\beta<y<y_0+\beta. \end{cases}$$

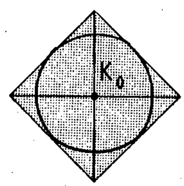
Δηλαδή είναι το εσωτερικό του κύκλου με κέντρο το σημείο K_0 και ακτίνα ρ (σχ. 2.1). Οι δύο άλλες ανισότητες ορίζουν μια ορθογωνιακή περιοχή του σημείου K_0 με μήκη ακμών, δηλαδή πλευρών, 2α,2β σχ. (2.2).



Σχήμα (2.1)



Σχήμα (2.2)



Σχήμα (2.3)

Στο χώρο $\mathbb{R}^3$ η ρ-σφαιρική ενός σημείου $K_0(x_0,y_0,z_0)$ ορίζεται από την πρώτη των επομένων ανισοτήτων:

$$(2.2)\qquad \begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<\rho^2 \\ x_0-\alpha<x<x_0+\alpha,\ y_0-\beta<y<y_0+\beta,\ z_0-\gamma<z<z_0+\gamma \end{cases}$$

Δηλαδή είναι το εσωτερικό της σφαίρας με κέντρο το σημείο K_0 και ακτίνα ρ. Οι τρεις άλλες ανισότητες ορίζουν μια ορθογωνιακή περιοχή του σημείου K_0 με μήκη ακμών 2α,2β,2γ. Επειδή, όπως γνωρίζουμε από τη στοιχειώδη γεωμετρία, σε κάθε κύκλο μπορούμε να εγγράψουμε ορθογώνιο ή τετράγωνο και αντιστρόφως, επανευρίσκουμε, γεωμετρικά, το ισοδύναμο της χρησιμοποιήσεως στον $\mathbb{R}^2$ κυκλικής, ορθογωνιακής ή τετραγωνικής περιοχής. Ανάλογα ισχύουν για τις σφαιρικές, ορθογωνιακές και κυβικές περιοχές στον $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα (2.1). Λαμβάνοντας υπόψη το παράδειγμα (1.1), το ανοικτό τετράγωνο που ορίζεται από την πρώτη των ανισοτήτων:

$$|x-x_0|+|y-y_0|<\rho, \quad |x-x_0|+|y-y_0|+|z-z_0|<\rho$$

είναι μια ανοικτή περιοχή του κέντρου του $K_0\ (x_0,y_0)$, γιατί είναι υπερσύνολο της κυκλικής περιοχής με το ίδιο κέντρο και ακτίνα $\rho/\sqrt{2}$ (σχ. 2.3). Αντίστοιχα, το ανοικτό οκτάεδρο που ορίζεται από τη δεύτερη των ανισοτήτων, είναι μια ανοικτή περιοχή του κέντρου του K_0 (x_0,y_0,z_0), γιατί είναι υπερσύνολο της σφαιρικής περιοχής με το ίδιο κέντρο και ακτίνα $\rho/\sqrt{3}$. Για το λόγο αυτό η περιοχή αυτή λέγεται **οκταεδρική**.

3. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΥ $\mathbb{R}^\nu$.

Με τη βοήθεια της έννοιας της περιοχής, που ορίσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, μπορούμε να ταξινομήσουμε τα σημεία του $\mathbb{R}^\nu$, σχετικά μ'ένα σύνολο A, κατά τον ακόλουθο τρόπο:

Ένα σημείο α λέγεται **εσωτερικό** σημείο του A, ακριβώς όταν υπάρχει περιοχή $\varpi(\alpha)\subset A$. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A λέγεται **εσωτερικό** του A και παριστάνεται με το σύμβολο $\mathring{A}$ ή και με $\underline{A}$. Προφανώς είναι $\mathring{A}\subset A$.

Ένα σημείο α λέγεται **εξωτερικό** σημείο του A, ακριβώς όταν υπάρχει περιοχή $\varpi(\alpha)\subset\mathbb{R}^\nu-A$. Το σύνολο των εξωτερικών σημείων του A λέγεται **εξωτερικό** του A και θα το παριστάνουμε με το σύμβολο A^*. Προφανώς είναι $A^*\subset\mathbb{R}^\nu-A$.

Ένα σημείο α λέγεται **συνοριακό** σημείο της A, ακριβώς όταν σε κάθε περιοχή $\varpi(\alpha)$ υπάρχουν σημεία τα A και σημεία του $\mathbb{R}^\nu-A$. Το σύνολο των συνοριακών σημείων του A λέγεται **σύνορο** του A και παριστάνεται με το σύμβολο ∂A ή και με $\dot{A}$. Προφανώς ισχύει $\partial A=\partial(\mathbb{R}^\nu-A)$.