Τρύφων Ι. Δάρας
Επ. Καθηγητής Πολυτεχνείου Κρήτης

Παναγιώτης Θ. Σύψας
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών

Πιθανότητες και Στατιστική

ΘΕΩΡΙΑ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ISBN 978-960-456-235-0

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210.3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Στην Ελενίτσα

Χαμόγελο μιάς στιγμής,
πολύτιμη παρακαταθήκη
μιάς ζωής.

Πρόλογος - Ιστορική Ανασκόπηση

Το βιβλίο αυτό αποτελεί μια εκτεταμένη εισαγωγή στην Θεωρία Πιθανοτήτων, περιέχει και ένα κεφάλαιο Περιγραφικής Στατιστικής, για να μπορέσει να γίνει αντιληπτή, μια αρχική σχέση μεταξύ των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων, αν και αναπτύχθηκε από την ανάγκη αντιμετώπισης καθημερινών προβλημάτων (ικανότητα «διαχείρισης του κινδύνου»), έχει τις ρίζες της στα τυχερά παιχνίδια (ζάρια, χαρτιά κ.α.). Είναι δύσκολο να πει κανείς πόσο παλιά είναι η συνήθεια να παίζει κάποιος τυχερά παιχνίδια. Επιτραπέζια παιχνίδια τα οποία «περιείχαν» το στοιχείο της τύχης φαίνεται (σε ανασκαφές που έγιναν στις πυραμίδες) να είχαν κατασκευαστεί, στην αρχαία Αίγυπτο από το 3000 π.χ. Το τυχαίο στοιχείο σε αυτά προερχόταν από το ρίξιμο κυρίως των αστραγάλων των προβάτων (κότσια), οι τέσσερες πλευρές των οποίων (στις οποίες μπορούσαν να στηριχθούν) παρίσταναν τους αριθμούς 4, 3, 1 και 6. Τα γνωστά μας ζάρια προήλθαν από αυτά, με λείανση των καμπύλων επιφανειών τους, και κατασκευάστηκαν μάλλον για πρώτη φορά από τους Έλληνες οι οποίοι τα αποκαλούσαν «τέσσερα». Αγγεία που βρέθηκαν, στην Ελλάδα, απεικονίζουν νέους να ρίχνουν οστά μέσα σε μια κυκλική περιοχή. Ακόμα, στην αρχαία Ελληνική μυθολογία αναφέρεται ότι θεοί του Ολύμπου αποφάσιζαν για το ριζικό των ανθρώπων ρίχνοντας ζάρια, όπως επίσης ο Δίας, ο Ποσειδώνας και ο Άδης έγιναν «κυβερνήτες» του ουρανού, της θάλασσας και του κάτω κόσμου αντίστοιχα παίζοντας το σύμπαν σε ένα παιχνίδι με ζάρια. Κυβικά ζάρια φτιαγμένα από κόκαλα ή πηλό βρέθηκαν σε αρχαίους Αιγυπτιακούς και Ελληνικούς τάφους, όπως επίσης στο Ιράκ και την Ινδία. Παιχνίδια με ζάρια ήταν αρκετά δημοφιλή και στην αρχαία Ρώμη. Αναφέρεται ακόμα ότι, ο Πόντιος Πιλάτος έβαλε σε κλήρο τον χιτώνα του Χριστού κατά την διάρκεια της σταύρωσής του.

Ο Αριστοτέλης είναι από τους πρώτους που καταπιάστηκαν με θέματα Πιθανοτήτων, θεωρούσε όμως «τυχαίο» κάθε τι το οποίο έχουμε αδυναμία (λόγω έλλειψης γνώσης) να το ερμηνεύσουμε. Ένα πράγμα που φαίνεται παράξενο είναι ότι, αν και οι αρχαίοι Έλληνες είχαν αναπτύξει τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες σε εξαιρετικό για την εποχή τους βαθμό, εν τούτοις δεν είχαν παρατηρήσει ότι, τα αποτελέσματα ενός παιχνιδιού που επαναλαμβάνεται παρουσιάζουν κάποιες αριθμητικές «κανονικότητες» (σχετικές συχνότητες). Η εξήγηση σε αυτό είναι ότι, τα οστά (ζάρια) που χρησιμοποιούσαν δεν είχαν ακριβώς ομοιόμορφες έδρες ώστε να εμφανίζονται, κατά την ρίψη τους, οι κανονικότητες που αναφέραμε. Λόγω λοιπόν αυτής της αδυναμίας παρατήρησης κανονικοτήτων ή με άλλα λόγια επειδή δεν είχε γίνει αντιληπτό ότι είναι δυνατόν να ποσοτικοποιηθεί η δυνατότητα (πιθανότητα) πραγματοποίησης μελλοντικών γεγονότων, τίποτε σημαντικό δεν έγινε στην Θεωρία των Πιθανοτήτων μέχρι την εποχή του Μεσαίωνα. Γεγονότα που δεν ήταν καθορισμένα, βρίσκονταν πέρα από κάθε ανάλυση και καθορίζονταν από ένα «υπέρτατο ον» (Θεός) .

Οι πρώτες «δειλές» προσπάθειες ανάπτυξης των πιθανοτήτων φαίνεται να ξεκινούν στα τέλη του 15^{ου} αιώνα. Το 1494 ο Luca Pacioli, στο βιβλίο του *Summa de arithmetica, geometrica proportioni et proportionalita* (*Τα πάντα για την αριθμητική, την γεωμετρία και τις αναλογίες*) δημοσίευσε το *πρόβλημα των πόντων*, όπως ονομάζεται, και το οποίο αργότερα ήταν μια από τις αρχικές αιτίες ανάπτυξης των Πιθανοτήτων. Το πρόβλημα αναφέρεται στο πως πρέπει να κατανεμηθεί το ποσό ενός στοιχήματος, όταν ένα παιχνίδι πολλών γύρων διακόπτεται χωρία να έχει ολοκληρωθεί.

Ο Giralomo Gardano (1501-76), αστρολόγος φιλόσοφος φυσικός μαθηματικός και τζογαδόρος είναι αυτός που έγραψε, γύρω στα 1564 αν και το βιβλίο δημοσιεύτηκε εκατό χρόνια αργότερα στα 1663, το πρώτο βιβλίο στις πιθανότητες με τίτλο *Liber De Ludo Aleae* (*Βιβλίο για παιχνίδια με ζάρια*). Στο βιβλίο αυτό ανέφερε τεχνικές στο πως να κλέβει κάποιος σε τυχερά παιχνίδια ή πως να καταλάβει ότι άλλοι κλέβουν. Επίσης, σωστά, απαρίθμησε τα αποτελέσματα της ρίψης δύο ζαριών, είναι δε ο πρώτος (μαζί με τον G. Galilaio) που διατύπωσε το ισοπίθανο των εδρών ενός αμερόληπτου ζαριού και επίσης ο πρώτος που εισήγαγε την πιθανότητα με την μορφή κλάσματος, δηλαδή το λόγο του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων προς το συνολικό πλήθος των ισοπίθανων περιπτώσεων. Ακόμα διατύπωσε τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων (ξένα γεγονότα) και τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων (ανεξάρτητα γεγονότα). Με το πρόβλημα των πόντων καταπιάστηκαν, χωρίς να έχουν ουσιαστική συμβολή στην λύση του και άλλοι μετέπειτα Ιταλοί μαθηματικοί όπως ο Nicolo Tartaglia και ο Lorenzo Forestani. Ακόμα, ο Galilei Galilaio στο άρθρο του *Sopra le scoperte dei dadi* (*Περί μιας ανακάλυψης αναφορικά με τα ζάρια*) ανέφερε, σωστά όλους τους τρόπους με τους οποίους το άθροισμα τριών ζαριών μπορεί να πάρει την τιμή 9 ή 10. Η συνεισφορά αυτή είναι σημαντική λόγω του ότι, προσέγγισε το για πρώτη φορά πρόβλημα *επιστημονικά* ξεκινώντας από μια *εμπειρική παρατήρηση* και αναζήτησε μια *μαθηματική εξήγηση* γι αυτό. Έθεσε έτσι τα θεμέλια για ότι θα ακολουθούσε στις Πιθανότητες.

Στα μέσα του 17^{ου} αιώνα, ένας επαγγελματίας παίχτης ο Chevalier de Mere απέκτησε αρκετά χρήματα ποντάροντας σε τυχερά παιχνίδια. Στοιχημάτιζε ότι σε 4 ρίψεις ενός ζαριού θα μπορούσε να φέρει τουλάχιστον ένα 6. Σύντομα η φήμη του διαδόθηκε με αποτέλεσμα άλλοι παίκτες να αρνούνται να παίξουν μαζί του το παιχνίδι αυτό. Αποφάσισε λοιπόν ότι χρειαζόταν κάποιο άλλο παιχνίδι για να συνεχίσει να κερδίζει. Σκεφτόμενος «λογικά», θεώρησε ότι θα μπορούσε να φέρει δύο τουλάχιστον 6 σε 24 ρίψεις δύο ζαριών, αλλά η λογική του ήταν λάθος με αποτέλεσμα να χάνει συστηματικά. Ανίκανος να διαπιστώσει τι ήταν λάθος, απευθύνθηκε στον διάσημο μαθηματικό της εποχής του, τον Blaise Pascal (1623-62).

Ο Pascal ενδιαφέρθηκε και άρχισε να μελετά τις Πιθανότητες. Αλληλογραφούσε με τον Pierre de Fermat, έναν κυβερνητικό υπάλληλο, ο οποίος ασχολιόταν με τα Μαθηματικά από hobby. Στις μεταξύ τους επιστολές ασχολήθηκαν με την ερώτηση του de Mere όπως επίσης και με το πρόβλημα των πόντων. Μαζί διατύπωσαν τις πρώτες βασικές αρχές τις Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Στα τέλη του 17^{ου} αιώνα ο Ελβετός Jacob Bernoulli (1654-1705) ήταν ο πρώτος που προσπάθησε να μετασχηματίσει, όλα όσα ήταν γνωστά μέχρι τότε για τα τυχερά παιχνίδια, σε μία τυπική μαθηματική θεωρία. Στο βιβλίο του *Ars Conjectandi* (*Η Τέχνη του εικάζειν*) διατύπωσε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας ενός γεγονότος. Ο ορισμός, όπως επίσης και μεγάλο μέρος της ανάπτυξης της Θεωρίας των Πιθανοτήτων βασισμένη στο κλασσικό αυτό ορισμό, πήρε την οριστική του μορφή από τον Pierre de Laplace (*Theorie Analytique des Probabilites*).

Σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων έπαιξαν επίσης ο Ολλανδός Christian Huygens (*De Ratiociniis in Aleae Ludo*), ο Gauss και ο de Montmort. Ακόμα, σημαντική είναι η προσφορά, τον 19^{ο} αιώνα, των Ρώσων Μαθηματικών P.L. Chebyshev, A.A. Markov, A.M. Lyapunov.

Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, η εκτεταμένη χρήση πιθανοθεωρητικών μεθόδων στην Φυσική και την τεχνολογία έκανε επιτακτική την ανάγκη ενός πιο «εκλεπτυσμένου» ορισμού της Πιθανότητας, γεγονός που τονίστηκε και από τον D. Hilbert στον κατάλογο των άλυτων προβλημάτων που παρουσίασε το 1900. Μία αποτυχημένη προσπάθεια να δοθεί ένας τέτοιος γενικός ορισμός της πιθανότητας ενός γεγονότος, με την βοήθεια της σχετικής συχνότητας εμφάνισής του, έγινε από τον Γερμανό Richard von Mises. Η αυστηρά μαθηματική θεμελίωση της θεωρίας των Πιθανοτήτων (μετροθεωρητική προσέγγιση) οφείλεται στον

Ρώσο μαθηματικό A.N. Kolmogorov (*The basic notions of the Probability Theory*, το 1936 στα Ρώσικα).

Η αρχή της Περιγραφικής Στατιστικής μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται σε απογραφές που γίνονταν στην Βαβυλώνα και την Αίγυπτο (4.500-3.000πχ). Ο Ρωμαίος αυτοκράτορας Αύγουστος έκανε καταγραφή των γεννήσεων και θανάτων των πολιτών της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας όπως επίσης της περιουσίας καθενός από αυτούς και του μεγέθους της ετήσιας (τους) σοδειάς όσων ασχολούνταν με την γεωργία. Έτσι στην Αρχαία Ρώμη είχαν αναπτύξει μεθόδους συλλογής, οργάνωσης και τρόπους να συνοψίζουν τα δεδομένα.

Κατά την διάρκεια του 14ου αιώνα άρχισαν να κρατούνται αρχεία των γεννήσεων και θανάτων των πολιτών διαφόρων κοινοτήτων, με κύριο σκοπό τον καθορισμό του κόστους ασφαλειών που έκαναν. Ο John Graunt (1620-74) μελέτησε τον αριθμό των ετήσιων γεννήσεων αγοριών και κοριτσιών, παρατήρησε δε ότι ενώ γεννιόνταν περισσότερα αγόρια, περισσότερα πέθαιναν και κατά την διάρκεια του πρώτου έτους της ζωής τους. Ο Gregor Mendel (1822-84) χρησιμοποίησε τις πιθανότητες και την στατιστική στις μελέτες του για την κληρονομικότητα. Ο Francis Galton (1822-1911) έκανε διαφόρων ειδών συσχετίσεις χρησιμοποιώντας αρακά, σκόρο, σκυλιά και ανθρώπους. Ο Ronald Fisher (1890-1962) ανέπτυξε μεθόδους επαγωγικής στατιστικής, πειραματικού σχεδιασμού, εκτίμησης και ανάλυσης διασποράς. Μετά το 1900 η στατιστική αναπτύχθηκε ραγδαία και τέλος με την εξέλιξη της τεχνολογίας και την χρήση Η.Υ. είναι δυνατή πλέον η ταυτόχρονη επεξεργασία μεγάλου πλήθους δεδομένων.

Στο βιβλίο αυτό, αν και εισαγωγικό, ορίζονται με αυστηρά μαθηματικά (χρήση θεωρίας μέτρου) οι περισσότερες από τις έννοιες που συναντά κανείς στην Θ.Π., όπως επίσης αποδεικνύονται αναλυτικά (ή δίνονται αναφορές για την απόδειξής τους) θεωρήματα και προτάσεις που σχετίζονται με τις έννοιες αυτές. Προαπαιτούμενο για την μελέτη του είναι η γνώση του περιεχόμενου ενός ή δύο εξαμηνιαίων μαθημάτων απειροστικού λογισμού. Τυχόν αναφορές σε έννοιες, προτάσεις, τρόπους απόδειξης κ.α. από την θεωρία μέτρου παρουσιάζονται εδώ αναλυτικά.

Στο **πρώτο κεφάλαιο** δίνεται αρχικά η έννοια του πειράματος τύχης και κατόπιν της πιθανότητας γεγονότος (με τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις). Στην συνέχεια περιγράφονται τεχνικές απαρίθμησης των στοιχείων ενός συνόλου (Συνδυαστική), απαραίτητες στον υπολογισμό πιθανοτήτων. Ακολουθεί ο ορισμός της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας γεγονότος και αποδεικνύονται σημαντικά θεωρήματα της Θ.Π. (όπως πολλαπλασιαστικό, ολικής πιθανότητας και Bayes). Τέλος εξετάζεται η έννοια της ανεξαρτησίας γεγονότων και υπολογίζεται η λεγόμενη αξιοπιστία συστημάτων.

Στο **δεύτερο κεφάλαιο** δίνεται η έννοια της τυχαίας μεταβλητής και ορίζονται ποσότητές της όπως η συνάρτηση κατανομής, η πυκνότητα πιθανότητας και η κατανομή της. Στην συνέχεια αναφέρονται οι κυριότερες διακριτές και συνεχείς κατανομές. Τέλος υπολογίζεται η κατανομή συναρτήσεων τ.μ. (θεώρημα μετασχηματισμού)

Τα κυριότερα αριθμητικά χαρακτηριστικά μιας τ.μ. όπως οι παράμετροι θέσης, μεταβλητότητας, συμμετρίας και κυρτότητας περιγράφονται στο **τρίτο κεφάλαιο**. Αναφέρονται ακόμα τα είδη ροπών μιας τ.μ. και αποδεικνύονται οι κυριότερες ανισότητες σχετικές με ροπές τ.μ (Markov, Chebyshev, Jensen) απαραίτητες σε αρκετές περιπτώσεις για τον υπολογισμό φραγμάτων ζητούμενων πιθανοτήτων. Τέλος δίνεται ο γενικός ορισμός της μέσης τιμής για να γίνει κατανοητή η σύνδεση της Θεωρίας Πιθανοτήτων με την Θεωρία Μέτρου.

Το **τέταρτο κεφάλαιο** αναφέρεται στις πολυδιάστατες τ.μ., τις ροπές τους και τις δεσμευμένες κατανομές. Ορίζεται ο συντελεστής συσχέτισης δύο τ.μ., αποδεικνύονται οι ιδιότητες του και θεωρήματα όπως η ισότητα Bienayme και η ανισότητα Cauchy-Schwarz . Περιγράφεται η ευθεία παλινδρόμησης και η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων. Ορίζεται η χρήσιμη έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής και τέλος αναφέρονται μερικές πολυδιάστατες τ.μ.

Στο πρώτο μέρος του **πέμπτου κεφαλαίου** ορίζεται η ανεξαρτησία τ.μ., έννοια βασική και μια από αυτές που διαφοροποιεί την Θεωρία Πιθανοτήτων από την Θεωρία Μέτρου. Δίνονται ισοδύναμοι ορισμοί της, περιγράφεται η σχέση της ανεξαρτησίας με την μέση τιμή, την δεσμευμένη μέση τιμή, την συσχέτιση τ.μ. κ.α. και αποδεικνύονται οι δύο ταυτότητες του Wald. Στο δεύτερο μέρος δίνεται τρόπος υπολογισμού της κατανομής του αθροίσματος, διαφοράς, γινομένου και πηλίκου τ.μ. Τέλος, στο τρίτο μέρος υπολογίζεται η κατανομή συναρτήσεων τ.μ. (θεωρήματα μετασχηματισμού).

Στο **έκτο κεφάλαιο** δίνεται ο ορισμός της γεννήτριας συνάρτησης. Περιγράφονται τα τρία κυριότερα είδη γεννητριών συναρτήσεων τ.μ. (πιθανογεννήτρια, ροπογεννήτρια, χαρακτηριστική συνάρτηση τ.μ.). Υπολογίζονται οι γεννήτριες συναρτήσεις γνωστών κατανομών και τέλος αποδεικνύονται θεωρήματα που συνδέουν τις γεννήτριες συναρτήσεις με την κατανομή, τις ροπές τ.μ. καθώς και την ανεξαρτησία τ.μ.

Στο **έβδομο κεφάλαιο** περιγράφονται τα διάφορα είδη σύγκλισης τ.μ καθώς και οι τρόποι σύνδεσής τους. Αποδεικνύονται, οριακά θεωρήματα όπως, οι λεγόμενοι νόμοι των μεγάλων αριθμών και το Κεντρικό Οριακό θεώρημα, το σπουδαιότερο ίσως θεώρημα που συναντά κανείς στην θεωρία πιθανοτήτων. Τα Οριακά Θεωρήματα μας βοηθούν: (i) στο να προσεγγίσουμε ήδη γνωστές κατανομές με την κανονική κατανομή (Κ.Ο.Θ.), κάνοντας πολλές φορές υπολογισμούς αρκετά εύκολους, (ii) μελετούν την Οριακή συμπεριφορά κατανομών (αναγκαία στο να προσεγγίσουμε κατανομές από άλλες γνωστές κατανομές.) κ.α..

Στο **όγδοο κεφάλαιο** δίνονται αρχικά οι ορισμοί των βασικών εννοιών της Στατιστικής (πληθυσμός, δείγμα, μεταβλητή, δειγματοληψία, δεδομένα, κ.α.), αναφέρονται οι τρόποι παρουσίασης στατιστικών δεδομένων (στατιστικοί πίνακες, διαγράμματα). Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζονται τα κυριότερα στατιστικά περιγραφικά μέτρα (κεντρικής τάσης, διασποράς, ασυμμετρίας, κύρτωσης), δηλαδή αριθμητικές ποσότητες που συνοψίζουν σε μεγάλο βαθμό τις πληροφορίες που περιέχονται στα δεδομένα (ενός δείγματος).

Το βιβλίο περιέχει αρκετά λυμένα παραδείγματα ή αντιπαραδείγματα και εφαρμογές, ένα σχεδόν για κάθε νέα έννοια που εισάγεται ή για κάθε θεώρημα ή πρόταση που αποδεικνύεται. Περιέχει ακόμα πάνω από 500 άλυτες ασκήσεις για περαιτέρω εξάσκηση του αναγνώστη.

Είναι αποτέλεσμα της μακρόχρονης διδασκαλίας, από τους συγγραφείς, αντίστοιχων μαθημάτων σε πανεπιστημιακά τμήματα τόσο της Ελλάδας αλλά και του εξωτερικού. Σκοπός του είναι να γίνει το αρχικό (αλλά συνάμα και αυστηρά Μαθηματικό) μέσο προετοιμασίας για μια παραπέρα πιο προχωρημένη μελέτη στην Θεωρία Πιθανοτήτων.

Ευχαριστούμε θερμά όσους βοήθησαν στην συγγραφή του, όπως και τις εκδόσεις Ζήτη για την επιμελημένη έκδοσή του.

Χανιά Σεπτέμβρης 2010

Τρύφων Ι. Δάρας **Παναγιώτης Θ. Σύψας**

Περιεχόμενα

Πίνακες

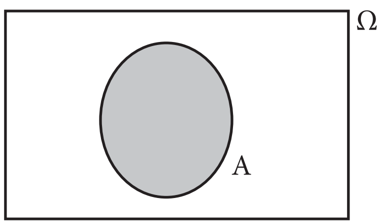
Κεφάλαιο 0

Θεωρία Συνόλων, σ-άλγεβρες

Ένα από τα βασικά εργαλεία που χρησιμοποιούμε στην Θεωρία Πιθανοτήτων είναι η Θεωρία Συνόλων. Δίνουμε παρακάτω μερικούς βασικούς ορισμούς της εν λόγω θεωρίας και αποδεικνύουμε σχετικές προτάσεις.

0.1 Θεωρία Συνόλων

Σε ότι ακολουθεί θα αναφερόμαστε σε ένα βασικό σύνολο, το οποίο συμβολίζουμε με Ω, δηλαδή μια συλλογή αντικειμένων καλά ορισμένων και διακεκριμένων μεταξύ τους. Εάν ένα αντικείμενο α ανήκει στο σύνολο Ω, το συμβολίζουμε με $\alpha \in \Omega$, λέμε ότι είναι **στοιχείο** του Ω ή **μέλος** του. Ένα σύνολο Α λέμε ότι είναι **υποσύνολο** ενός συνόλου Β, συμβολικά $A \subseteq B$, εάν κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β, δηλαδή εάν $\forall \alpha \in A$ έπεται ότι $\alpha \in B$. Όλα τα σύνολα με τα οποία θα ασχοληθούμε, υποθέτουμε ότι είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω.



Ένας από τους τρόπους για να αντιληφθεί κανείς διαισθητικά (γραφικά) τις βασικές έννοιες της Θεωρίας Συνόλων, είναι τα λεγόμενα **διαγράμματα του Venn**. Στα διαγράμματα αυτά, το βασικό σύνολο Ω παριστάνεται με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τα δε υποσύνολά του με επίπεδα (κυκλικά συνήθως) κλειστά χωρία.

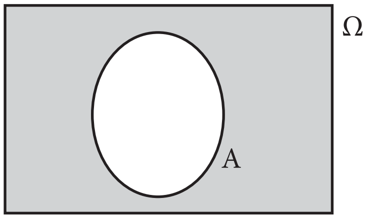
◆ **Παρατήρηση 0.1.1**

Όταν χρησιμοποιεί κανείς τα διαγράμματα του Venn, πρέπει να είναι αρκετά προσεχτικός. Τα διαγράμματα αυτά είναι μια πρώτη **ένδειξη** του αν ισχύει κάτι, ιδιαίτερα στις ιδιότητες των πράξεων μεταξύ συνόλων που θα ορίσουμε παρακάτω. Δεν αποτελούν όμως (αποδεκτή μαθηματική) **απόδειξη**, γιατί όταν προσπαθεί να αποδείξει με την βοήθειά τους ιδιότητες σε πλήρη γενικότητα, τα σύνολα δεν είναι συγκεκριμένα οπότε οι αποδείξεις εξαρτώνται από τον τρόπο κατασκευής τους (σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις υπάρχουν συνήθως περισσότερα του ενός τέτοια διαγράμματα). ◆

Δύο σύνολα A, B λέγονται **ίσα** εάν έχουν τα ίδια στοιχεία, συμβολικά A=B. Για να αποδείξουμε ότι δύο σύνολα A,B είναι ίσα, αρκεί να δείξουμε ότι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

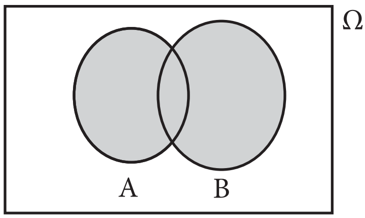
Το **συμπλήρωμα** ενός συνόλου A, συμβολικά A^c, είναι το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A, δηλαδή

$$A^c = \{x \in \Omega / \, x \notin A\}.$$



Η **ένωση** δύο συνόλων A,B , συμβολικά $A \cup B$, είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα δύο σύνολα, δηλαδή

$$A \cup B = \{x \in A \;\; \eta \;\; x \in B\}.$$



Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται και η ένωση περισσότερων των δύο συνόλων.

Ανάλογα με την περίπτωση συνήθως γράφουμε:

(α) για πεπερασμένο πλήθος συνόλων $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$

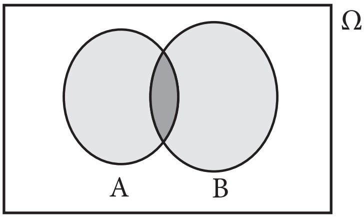
(β) για αριθμήσιμο πλήθος συνόλων $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$

(γ) για μια (μη-αριθμήσιμη) οικογένεια συνόλων $\bigcup_{k\in I} A_k$,

όπου I ένα σύνολο δεικτών.

Η **τομή** δύο συνόλων A,B, συμβολικά $A\cap B$, είναι το σύνολο που αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων, δηλαδή

$$A\cap B=\{x\in A \text{ και } x\in B\}.$$



Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται και η τομή περισσότερων των δύο συνόλων.

Ανάλογα με την περίπτωση συνήθως γράφουμε:

(α) για πεπερασμένο πλήθος συνόλων $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n=\bigcap_{k=1}^{n} A_k$

(β) για αριθμήσιμο πλήθος συνόλων $A_1\cap A_2\cap\ldots=\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$

(γ) για μια (μη-αριθμήσιμη) οικογένεια συνόλων $\bigcap_{k\in I} A_k$,

όπου I ένα σύνολο δεικτών.

Πρόταση 0.1.2

Η ένωση και η τομή συνόλων ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) (**αντιμεταθετική**) (α) $A\cup B=B\cup A$

(β) $A\cap B=B\cap A$

(2) (**προσεταιριστική**) (α) $(A\cup B)\cup\Gamma=A\cup(B\cup\Gamma)$

(β) $(A\cap B)\cap\Gamma=A\cap(B\cap\Gamma)$

(3) (**επιμεριστική**) (α) $A\cup(B\cap\Gamma)=(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$

(β) $A\cap(B\cup\Gamma)=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$

ή γενικότερα (α′) $A\cap\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(A\cap A_i)$

(β′) $A\cup\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$

(4) (**κανόνες του De Morgan**) (α) $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$

(β) $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$

ή γενικότερα (α′) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$

(β′) $\left(\bigcap_{i\in I} A_k\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$.

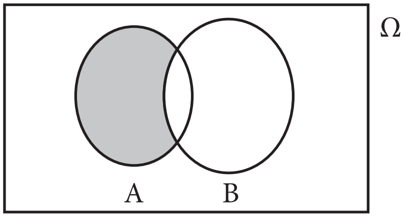
Απόδειξη. Αφήνεται σαν άσκηση. ■

◆ **Παρατήρηση 0.1.3**

Οι πράξεις της ένωσης και της τομής πολλές φορές καλούνται **δυϊκές**, γιατί εάν μια ιδιότητα ισχύει για τις ενώσεις (τομές) συνόλων, τότε εναλλάσσοντας τις ενώσεις (τομές) με τομές (ενώσεις) η πρόταση εξακολουθεί (συνήθως) να ισχύει. ◆

Η **διαφορά** του συνόλου Β από το σύνολο Α, συμβολικά $A-B$, είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν στο Α αλλά όχι στο Β, δηλαδή

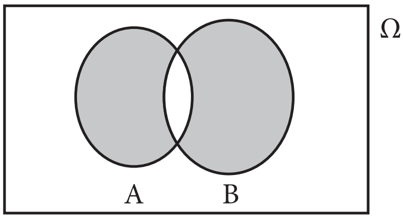
$$A-B=\{x\in A \text{ και } x\notin B\}.$$



Τα σύνολα $A-B$ και $B-A$ δεν είναι ίσα εν γένει. Επίσης $A-B=A\cap B^c$.

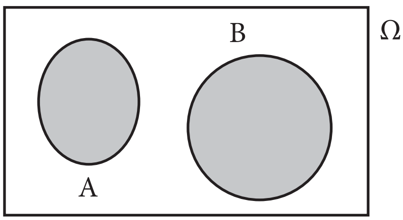
Η **συμμετρική διαφορά** δύο συνόλων Α, Β, συμβολικά $A\Delta B$, είναι το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν σε ένα ακριβώς από τα σύνολα Α,Β, δηλαδή

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$



Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$.

Το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο καλείται το **κενό** σύνολο, συμβολίζεται δε με $\varnothing$. Δύο σύνολα Α, Β λέγονται **ξένα** ή **ασυμβίβαστα** εάν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, δηλαδή εάν η τομή τους είναι το κενό σύνολο $(A\cap B=\varnothing)$.

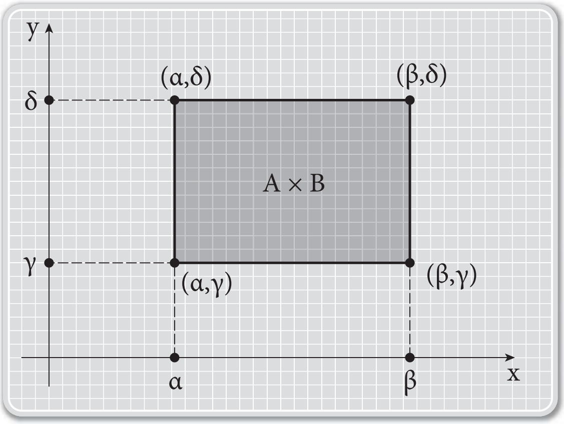


Ορισμός 0.1.4

Εάν Ω_1,Ω_2 δύο σύνολα και $A\subseteq\Omega_1, B\subseteq\Omega_2$, τότε το **καρτεσιανό γινόμενο** των συνόλων Α και Β**, συμβολικά** $A\times B$**,** είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγαριών (x,y) όπου $x\in A,\ y\in B$, δηλαδή $A\times B=\{(x,y)/x\in A,\ y\in B\}$. Στην περίπτωση αυτή σαν Ω θεωρούμε το σύνολο $\Omega_1\times\Omega_2$ (δηλαδή $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$).

❖ Παράδειγμα 0.1.5

Εάν $A=[\alpha,\beta], B=[\gamma,\delta], \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}, \Omega_1=\Omega_2=\mathbb{R}$, τότε το $A\times B$ είναι όλα τα σημεία του (επιπέδου) ορθογωνίου με κορυφές τα σημεία (α,γ), (β,γ), (α,δ), (β,δ).



❖

Ορισμός 0.1.6

Μια ακολουθία συνόλων $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ (υποσυνόλων του Ω) καλείται **αύξουσα,** συμβολικά $A_n\uparrow$, εάν $A_1\subseteq A_2\subseteq\ldots\subseteq A_n\subseteq\ldots$.

Ακόμα, μια ακολουθία συνόλων $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ καλείται **φθίνουσα,** συμβολικά $A_n\downarrow$, εάν $A_1\supseteq A_2\supseteq\ldots\supseteq A_n\supseteq\ldots$.

Ορισμός 0.1.7

Εάν η ακολουθία συνόλων $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι αύξουσα, τότε το **όριό** της ορίζεται να είναι: $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n=\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}A_k$. Εάν η ακολουθία είναι φθίνουσα , τότε το όριό της ορίζεται να είναι $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n=\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}A_k$.

❖ **Παράδειγμα 0.1.8**

- Η ακολουθία συνόλων $A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} / 0 \le x < x - \frac{1}{n} \right\}, n = 1,2,\ldots$ είναι αύξουσα και το όριό της $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = [0,1)$.
- Η ακολουθία των συνόλων $B_n = \left\{ x \in \mathbb{R} / 0 \le x < x + \frac{1}{n} \right\}$, $n = 1,2,\ldots$ είναι φθίνουσα και το όριό της $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n = [0,1]$. ❖

Ορισμός 0.1.9

Το **ανώτερο όριο** μίας ακολουθίας συνόλων $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$, συμβολικά $\overline{A} = \limsup\limits_{n \to +\infty} A_n$, είναι το σύνολο:

$$\overline{A} = \limsup_{n \to +\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \tag{0.1.10}$$

Από τον ορισμό του είναι φανερό ότι, το ανώτερο όριο μίας ακολουθίας συνόλων, είναι ισοδύναμα το σύνολο:

$$\overline{A} = \limsup_{n \to +\infty} A_n = \{\alpha \in \Omega / \text{το } \alpha \text{ ανήκει σε άπειρο πλήθος από τα } A_n, n = 1,2,\ldots\}$$

Ορισμός 0.1.11

Το **κατώτερο όριο** μίας ακολουθίας συνόλων $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$, συμβολικά $\underline{A} = \liminf\limits_{n \to +\infty} A_n$, είναι το σύνολο:

$$\underline{A} = \liminf_{n \to +\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \tag{0.1.12}$$

Από τον ορισμό του είναι φανερό ότι, το κατώτερο όριο μίας ακολουθίας συνόλων, είναι ισοδύναμα το σύνολο:

$$\underline{A} = \liminf_{n \to +\infty} A_n = \{\alpha \in \Omega / \text{το } \alpha \text{ ανήκει σε όλα εκτός από πεπερασμένο πλήθος από τα } A_n\}$$

❖ **Παράδειγμα 0.1.13**

Εάν τα σύνολα A,B είναι υποσύνολα του Ω και ορίσουμε τα σύνολα:

$$A_{2n} = A, \; A_{2n-1} = B, \quad n = 1,2,\ldots$$

Τότε είναι φανερό ότι

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = A \cup B, \quad \liminf_{n\to+\infty} A_n = A \cap B\,. \qquad ❖$$

■ Πρόταση 0.1.14

Για μια ακολουθία συνόλων $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$, ισχύουν τα εξής:

(α) $\underline{A} \subseteq \overline{A}$

(β) Εάν η ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι μονότονη (δηλαδή φθίνουσα ή αύξουσα) τότε:

$$\underline{A} = \overline{A} = \lim_{n\to+\infty} A_n\,.$$

Απόδειξη

Εύκολη και αφήνεται σαν άσκηση (προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς). ■

0.2 σ-άλγεβρες

Μια από τις έννοιες που είναι απαραίτητη για την αυστηρή (μαθηματική) θεμελίωση της Θεωρίας των Πιθανοτήτων είναι και εκείνη της σ-άλγεβρας. Στην παράγραφο αυτή λοιπόν δίνουμε τον ορισμό μίας σ-άλγεβρας, αναφέρουμε χαρακτηριστικά παραδείγματα και τέλος αποδεικνύουμε μερικές βασικές προτάσεις.

Ορισμός 0.2.1 (σ-άλγεβρα)

Μια κλάση $\Im$ υποσυνόλων του Ω, δηλαδή ένα σύνολο από υποσύνολα του Ω, καλείται **σ-άλγεβρα** ή **σ-σώμα** (σ-algebra ή σ-field) εάν ικανοποιούνται οι παρακάτω τρεις ιδιότητες:

(Σ1) Η κλάση $\Im$ είναι μη-κενή (δηλαδή περιέχει ένα τουλάχιστον υποσύνολο του Ω).

(Σ2) Εάν το σύνολο $A \in \Im$, τότε συνεπάγεται ότι και το $A^c \in \Im$.

(Σ3) Εάν τα σύνολα $A_n \in \Im$, $n = 1,2,\ldots$ (αριθμήσιμο πλήθος συνόλων) τότε έπεται ότι και το σύνολο $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \Im$.

◆ **Παρατήρηση 0.2.2**

(α) Εάν η κλάση $\Im$ είναι μία σ-άλγεβρα και τα σύνολα $A_n \in \Im$, $n=1,2,\ldots$, τότε έπεται ότι και το σύνολο $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \in \Im$ (αριθμήσιμες τομές).

Πράγματι, η $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k^c\right)^c$. Αλλά από το ότι $A_k \in \Im$ **και** $\Im$ είναι μία σ-άλγεβρα έπεται ότι $A_k^c \in \Im$, $k=1,2,\ldots$. Από την ιδιότητα (Σ3) έπεται ότι $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k^c \in \Im$, οπότε από την ιδιότητα (Σ2) έπεται ότι $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k^c\right)^c \in \Im$.

Στην πραγματικότητα η ιδιότητα (Σ3) του ορισμού μίας σ-άλγεβρας, είναι ισοδύναμη με (οπότε μπορεί να αντικατασταθεί από) την:

(Σ3′) Εάν τα σύνολα $A_n \in \Im$, $n=1,2,\ldots$ (αριθμήσιμο πλήθος συνόλων) τότε έπεται ότι και το σύνολο $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \in \Im$.

(β) Εάν η ιδιότητα (Σ3) ισχύει μόνον για πεπερασμένα πλήθη συνόλων, τότε η κλάση $\Im$ καλείται **άλγεβρα** ή **σώμα**.

(γ) Η ιδιότητα (Σ2) μας αναφέρει ότι μια σ-άλγεβρα είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα, ενώ η ιδιότητα (Σ3) μας αναφέρει ότι μια σ-άλγεβρα είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις συνόλων της

(δ) Το $\varnothing$ (οπότε και το Ω) ανήκει πάντα σε μια, οποιαδήποτε, σ-άλγεβρα του Ω. ◆

❖ **Παράδειγμα 0.2.3**

(1) Η κλάση $\Im_1 = \{\varnothing, \Omega\}$ είναι μια σ-άλγεβρα. Είναι η μικρότερη δυνατή και καλείται η **τετριμμένη** σ-άλγεβρα (trivial σ-algebra).

(2) Η κλάση $\Im_2 = \{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$, όπου $A \subseteq \Omega$ είναι μια σ-άλγεβρα. Είναι η μικρότερη δυνατή , μετά την τετριμμένη σ-άλγεβρα.

(3) Η κλάση $\Im_3 = \mathscr{P}(\Omega) = \{\text{όλα τα υποσύνολα του } \Omega\}$ είναι μια σ-άλγεβρα. Είναι η μεγαλύτερη δυνατή και καλείται **δυναμοσύνολο** του Ω ή **διακριτή** σ-άλγεβρα (discrete σ-algebra).

(4) Εάν $\Im$ είναι μία σ-άλγεβρα και $A \subseteq \Omega$, τότε ορίζουμε την κλάση των συνόλων

$$\Im_A = \{B \subseteq A / \ B = A \cap \Gamma, \ \Gamma \in \Im\}$$

Η $\Im_A$ είναι μία σ-άλγεβρα (υποσυνόλων του Α) και καλείται η σ-άλγεβρα που **επάγεται** από το σύνολο Α. Δηλαδή το βασικό μας σύνολο Ω αντικαθίσταται από το σύνολο Α και τα συμπληρώματα λαμβάνονται αναφορικά με το σύνολο Α. ❖

◆ Παρατήρηση 0.2.4

Εάν $\Im$ είναι μια άλγεβρα, τότε η $\Im$ δεν είναι απαραίτητα μια σ-άλγεβρα. ◆

❖ (Αντι) Παράδειγμα 0.2.5

Θεωρούμε την κλάση $\Im$ των υποσυνόλων ενός συνόλου Ω:

$$\mathscr{C} = \{A \subseteq \Omega / A \text{ η } A^c \text{ ειναι πεπερασμενο}\}$$

Η $\Im$ είναι (πάντα) μια άλγεβρα, αλλά εάν το Ω είναι ένα μη-αριθμήσιμο σύνολο, τότε η $\Im$ δεν είναι μια σ-άλγεβρα. ❖

Η σχέση που συνδέει άλγεβρες και σ-άλγεβρες περιγράφεται στην παρακάτω πρόταση.

■ Πρόταση 0.2.6

Εάν $\Im$ είναι μια άλγεβρα, τότε η $\Im$ είναι μια σ-άλγεβρα αν και μόνον αν η $\Im$ είναι κλειστή κάτω από τις αριθμήσιμες αύξουσες ενώσεις.

[Δηλαδή: εάν $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\Im$

($A_n \in \Im$, $n = 1,2,\ldots$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$), τότε: το σύνολο $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \Im$.] ■

■ Πρόταση 0.2.7

Εάν για κάθε $i \in I$, όπου I ένα σύνολο δεικτών, η $\Im_i$ είναι μια σ-άλγεβρα, τότε κλάση $\Im = \bigcap_{i \in I} \Im_i$ είναι μια σ-άλγεβρα. ■

● Θεώρημα 0.2.8

Εάν $\mathscr{C}$ είναι μια οποιαδήποτε κλάση υποσυνόλων του Ω, τότε υπάρχει μία μοναδική ελάχιστη (δηλαδή η μικρότερη δυνατή) σ-άλγεβρα $\Im$ που περιέχει την $\mathscr{C}$. Η σ-άλγεβρα $\Im$ καλείται σ-άλγεβρα που **παράγεται** ή **γεννιέται** από την κλάση $\mathscr{C}$ (σ-algebra generated by $\mathscr{C}$) και συμβολίζεται με $\Im = \sigma(\mathscr{C})$.

Απόδειξη

Έστω $\{\mathfrak{I}_i\}_{i\in I}$ η οικογένεια όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την κλάση $\mathscr{C}$. Η οικογένεια αυτή είναι μη-κενή αφού απαραίτητα περιέχει την διακριτή σ-άλγεβρα. Εάν ορίσουμε ως

$$\mathfrak{I}=\sigma(\mathscr{C})=\bigcap_{i\in I}\mathfrak{I}_i$$

τότε από την προηγούμενη πρόταση η $\mathfrak{I}$ είναι μία σ-άλγεβρα. Είναι η μικρότερη δυνατή, αφού κάθε άλλη σ-άλγεβρα που περιέχει την κλάση $\mathscr{C}$, θα είναι μία από τις σ-άλγεβρες $\mathfrak{I}_j$, οπότε

$$\sigma(\mathscr{C})=\bigcap_{i\in I}\mathfrak{I}_i\subseteq\mathfrak{I}_j\,.$$

Είναι φανερό ότι η $\mathfrak{I}=\sigma(\mathscr{C})$ είναι και μοναδική. ●

❖ Παράδειγμα 0.2.9

(α) Είναι φανερό ότι, εάν $\mathscr{C}$ είναι μια σ-άλγεβρα, τότε $\mathscr{C}=\sigma(\mathscr{C})$.

(β) Εάν $\mathscr{C}=\{\varnothing\}$ ή $\mathscr{C}=\{\Omega\}$, τότε: $\mathscr{C}=\{\varnothing,\Omega\}$. ❖

■ Πρόταση 0.2.10

Εάν $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ είναι δύο κλάσεις υποσυνόλων του Ω, τ.ω. $\mathscr{C}_1\subseteq\mathscr{C}_2$, τότε:

$$\sigma(\mathscr{C}_1)\subseteq\sigma(\mathscr{C}_2)\,.$$ ■

❖ Παράδειγμα 0.2.11 (σ-άλγεβρα του Borel)

Εάν $\Omega=\mathbb{R}$ και θεωρήσουμε σαν κλάση $\mathscr{C}$ την:

$$\begin{aligned}\mathscr{C}&=\{\text{όλα τα διαστήματα του }\mathbb{R}\}\\ &=\{[x,y],(x,y],(x,y),[x,y),[x,+\infty),(-\infty,x],(x,+\infty),(-\infty,x): x,y\in\mathbb{R},\ x<y\}\end{aligned}$$

τότε η σ-άλγεβρα που παράγεται ή γεννιέται από την κλάση $\mathscr{C}$ καλείται **σ-άλγεβρα** του **Borel** στο $\mathbb{R}$ και συμβολίζεται συνήθως με $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. ❖

◆ Παρατήρηση 0.2.12

(1) Εάν ορίσουμε τις κλάσεις

$$\mathscr{C}_1=\{[x,y]: x,y\in\mathbb{R},\ x<y\},\qquad \mathscr{C}_2=\{(x,y]: x,y\in\mathbb{R},\ x<y\}$$
$$\mathscr{C}_3=\{(x,y): x,y\in\mathbb{R},\ x<y\},\qquad \mathscr{C}_4=\{[x,y): x,y\in\mathbb{R},\ x<y\}$$
$$\mathscr{C}_5=\{[x,+\infty): x\in\mathbb{R}\},\qquad \mathscr{C}_6=\{(-\infty,x]: x\in\mathbb{R}\}$$
$$\mathscr{C}_7=\{(x,+\infty): x\in\mathbb{R}\},\qquad \mathscr{C}_8=\{(-\infty,x): x\in\mathbb{R}\}$$

Τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι η σ-άλγεβρα του Borel παράγεται από κάθε μία από τις παραπάνω κλάσεις.

Πράγματι, θα δείξουμε π.χ. ότι η κλάση $\mathscr{C}_1$ παράγει την σ-άλγεβρα του Borel. Κατ' αρχάς $\mathscr{C}_1 \subseteq \mathscr{C}$, οπότε έπεται ότι $\sigma(\mathscr{C}_1) \subseteq \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \sigma(\mathscr{C}_1)$ ή ότι $\mathscr{C} \subseteq \sigma(\mathscr{C}_1)$.

Τώρα το $[x,y] \in \mathscr{C}$ αλλά και $[x,y] \in \mathscr{C}_1$. Για να δείξουμε ότι $[x,y) \in \sigma(\mathscr{C}_1)$, έστω $y_n \uparrow y$, τότε:

$$[x,y) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [x, y_n] \in \sigma(\mathscr{C}_1)$$

Το $[x,+\infty) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [x, x+n) \in \sigma(\mathscr{C}_1)$.

Επειδή $(-\infty,x)^c = [x,+\infty)$ έπεται ότι $(-\infty, x) \in \sigma(\mathscr{C}_1)$.

Ακόμα $(x,y) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[x+\frac{1}{n}, x-\frac{1}{n}\right] \in \sigma(\mathscr{C}_1)$.

Επίσης $(x,+\infty) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (x, x+n) \in \sigma(\mathscr{C}_1)$. Τέλος $(x,y] = (-\infty,y] \cup (x,+\infty) \in \sigma(\mathscr{C}_1)$.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και κάθε μια από τις υπόλοιπες κλάσεις γεννούν την σ-άλγεβρα του Borel.

(2) Η σ-άλγεβρα του Borel είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του δυναμοσυνόλου του $\mathbb{R}$, δηλαδή $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Με άλλα λόγια υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι Borel μετρήσιμα. ◆

❖ Παράδειγμα 0.2.13

Εάν $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και θεωρήσουμε την κλάση των συνόλων

$$\begin{aligned}\mathscr{C} = \{&[x_1,y_1]\times[x_2,y_2], (x_1,y_1]\times[x_2,y_2], [x_1,y_1)\times[x_2,y_2], (x_1,y_1)\times[x_2,y_2], \ldots\\ &(-\infty,x_1]\times(-\infty,x_2], (-\infty,x_1)\times(-\infty,x_2], (-\infty,x_1]\times(-\infty,x_2), (-\infty,x_1)\times(-\infty,x_2)\\ &[x_1,+\infty)\times[x_2,+\infty), (x_1,+\infty)\times[x_2,+\infty), [x_1,+\infty)\times(x_2,+\infty), (x_1,+\infty)\times(x_2,+\infty):\\ &x_1,y_1,x_2,y_2 \in \mathbb{R},\ x_1<y_1\ \&\ x_2<y_2\}\end{aligned}$$

τότε η σ-άλγεβρα που παράγεται ή γεννιέται από την κλάση $\mathscr{C}$ καλείται **σ-άλγεβρα** του **Borel** στο $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ η σ-άλγεβρα του **Borel 2-διαστάσεων** και συμβολίζεται συνήθως με $\mathscr{B}^2(\mathbb{R})$.

Ανάλογα ορίζεται και η σ-άλγεβρα του **Borel k-διαστάσεων.** ❖

0.3 Ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

(α) $A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$

(β) $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

(γ) $A\Delta B=\left(A^c\cup B\right)\Delta\left(A\cup B^c\right)$

(δ) $(A-B)\cap(\Gamma-E)=(A\cap\Gamma)-(B\cup\Delta)$

(ε) Εάν $A\Delta B=\Gamma\Delta E\Rightarrow A\Delta\Gamma=B\Delta E$

2. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\overline{A}=\limsup_{n\to+\infty}A_n=\{\alpha\in\Omega/$ το α ανήκει σε άπειρο πλήθος από τα $A_n, n=1,2,...\}$

(β) $\underline{A}=\liminf_{n\to+\infty}A_n=\{\alpha\in\Omega/$ το α ανήκει σε όλα εκτός από πεπερασμένο πλήθος από τα $A_n\}$

3. Εάν η κλάση $\Im$ είναι μια άλγεβρα, τότε δείξτε ότι η:

(α) $\left(\Im,\Delta\right)$ είναι μια αντιμεταθετική ομάδα.

(β) $\left(\Im,\Delta,\cap\right)$ είναι ένας δακτύλιος.

4. Εάν $\Im$ μια κλάση υποσυνόλων ενός συνόλου Ω τέτοια ώστε:

(i) $\Omega\in\Im$

(ii) $A,B\in\Im\Rightarrow A-B\in\Im$

Δείξτε ότι η $\Im$ είναι μια άλγεβρα

5. Εάν $\Im$ μια κλάση υποσυνόλων ενός συνόλου Ω τέτοια ώστε:

(i) $\Omega\in\Im$

(ii) $A\in\Im\Rightarrow A^c\in\Im$

(iii) $A,B\in\Im$ & $A\cap B=\varnothing\Rightarrow A\cup B\in\Im$

(δηλαδή η κλάση είναι μη-κενή, κλειστή ως προς τα συμπληρώματα και τις πεπερασμένες ξένες ενώσεις). Δείξτε (δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα) ότι η $\Im$ δεν είναι απαραίτητα μια άλγεβρα

6. Έστω $\Im$ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Εάν τα σύνολα $A,B\in\Im$ και η $\Im$, τότε να δείξετε ότι η $\Im$ περιέχει και τα σύνολα: $A\cap B$, $A-B$, $A\Delta B$.

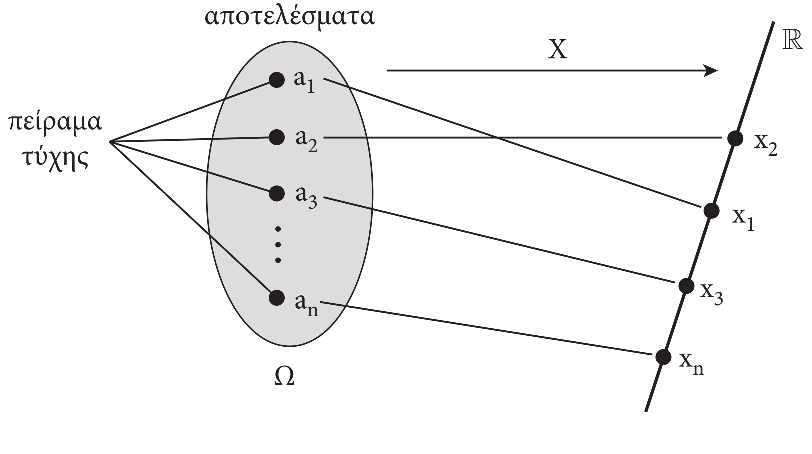
Κεφάλαιο 2

Τυχαίες μεταβλητές
Κατανομές τυχαίων μεταβλητών

2.1 Τυχαίες μεταβλητές

Πολλές φορές σε ένα πείραμα τύχης δεν μας ενδιαφέρει ο δειγματοχώρος του (ο οποίος όπως είδαμε μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο ακόμα και μη-αριθμητικό), αλλά ένα σύνολο το οποίο είναι αποτέλεσμα μιας απεικόνισης (συνάρτησης) των στοιχείων του δειγματοχώρου στους πραγματικούς αριθμούς (μας ενδιαφέρει ένα ποσοτικό χαρακτηριστικό των στοιχείων του Ω).

Σχηματικά έχουμε:



Για να γίνει αυτό κατανοητό δίνουμε το παρακάτω παράδειγμα: έστω ότι ρίχνουμε δύο νομίσματα, τότε ως γνωστόν ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι ίσος με:

$$\Omega=\{\text{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}\}$$

Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει ο αριθμός των Κ τα οποία εμφανίζονται, και ας συμβολίσουμε τον αριθμό αυτό με X. Τότε εάν κατά την εκτέλεση του πειράματος συμβεί το γεγονός ΚΚ, η αντίστοιχη τιμή του X είναι 2. Εάν συμβεί το γεγονός ΚΓ ή το ΓΚ, η αντίστοιχη τιμή του X είναι 1, και εάν τέλος συμβεί το γεγονός ΓΓ η αντίστοιχη τιμή του X είναι 0. Έτσι ορίσαμε έναν τρόπο με την βοήθεια του οποίου, σε κάθε δειγματοσημείο *αντιστοιχούμε* έναν πραγματικό αριθμό, μ' άλλα λόγια ορίσαμε μια συνάρτηση X με πεδίο ορισμού τον δειγματοχώρο και πεδίο τιμών το υποσύνολο {0, 1, 2} των πραγματικών αριθμών.

Αν θεωρήσουμε ότι ένα δοχείο περιέχει λάμπες, μερικές από τις οποίες είναι ελαττωματικές και ας υποθέσουμε ότι διαλέγουμε μια λάμπα, με επανατοποθέτηση, μέχρι ότου διαλέξουμε μία ελαττωματική. Ο δειγματοχώρος του π.τ. είναι:

$$\Omega=\{\text{Ε, ΚΕ, ΚΚΕ, ..., ΚΚΚ...ΚΕ, ...}\}$$

Αν μας ενδιαφέρει το πόσες φορές επαναλαμβάνουμε την δειγματοληψία, τότε πάλι ορίζουμε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Ω και πεδίο τιμών το σύνολο {1,2,...,n,..} (αριθμήσιμο).

Ορισμός 2.1.1

Μια **τυχαία μεταβλητή X** (τ.μ.) (random variable), είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού έναν δειγματοχώρο Ω και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών (δηλαδή η $X\colon \Omega \to R$).

◆ Παρατήρηση 2.1.2 (Μετροθεωρητικός ορισμός μιας τ.μ.)

Στην πραγματικότητα, εάν θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε συνάρτηση $X\colon \Omega \to R$, όπου στο δειγματοχώρο Ω έχει οριστεί μια σ-άλγεβρα γεγονότων $\mathfrak{I}$, τότε η εν λόγω συνάρτηση θεωρείται ότι είναι μια **τυχαία μεταβλητή** εάν ικανοποιεί την συνθήκη:

$$X^{-1}(A)=\{\omega / X(\omega)\in A\}\in \mathfrak{I} \qquad (2.1.3)$$

για κάθε $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$, όπου $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ η **σ-άλγεβρα** του **Borel** στο $\mathbb{R}$. Μια συνάρτηση X που ικανοποιεί την συνθήκη αυτή καλείται **μετρήσιμη** (measurable).

Κεφάλαιο 5

Στοχαστική ανεξαρτησία τ.μ.

5.1 Στοχαστική ανεξαρτησία τ.μ.

Η έννοια της ανεξαρτησίας τ.μ είναι μια γενίκευση της έννοιας της ανεξαρτησίας γεγονότων. Είναι από τα πιο χρήσιμα εργαλεία που διαθέτει κανείς στην Θεωρία Πιθανοτήτων.

Ορισμός 5.1.1

Δύο τ.μ X_1, X_2, ορισμένες στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο, καλούνται (**στοχαστικά**) **ανεξάρτητες** εάν:

$$P\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2\} = P\{X_1 \in B_1\} \cdot P\{X_2 \in B_2\} \tag{5.1.2}$$

$\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, όπου $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ η **σ-άλγεβρα** του **Borel** στο $\mathbb{R}$.

Ο έλεγχος της ανεξαρτησίας δυο τ.μ γίνεται συνήθως με την βοήθεια ισοδύναμων ορισμών (κριτήρια), μερικά από τα οποία δίνονται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.1.3

Έστω X_1, X_2 δύο τ.μ. με α.κ.σ.κ F_{X_1, X_2} και α.κ.π.π. f_{X_1, X_2}. Οι τ.μ X_1, X_2 είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητες εάν και μόνον εάν ισχύει μια από τις παρακάτω σχέσεις:

(α) $P\{a<X_1\le b,\ c<X_2\le d\}=P\{a<X_1\le b\}\cdot P\{c<X_2\le d\}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $a\le b, c\le d$

(β) $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2),\quad \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$

(γ) $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2),\quad \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη

(α) ($\Rightarrow$) Εάν οι τ.μ. X_1,X_2 είναι ανεξάρτητες και θέσουμε $B_1=(a,b]$, $B_2=(c,d]$ τότε είναι προφανές ότι ισχύει η (α).

($\Leftarrow$) Η απόδειξη γίνεται με την βοήθεια ενός συνηθισμένου τρόπου, σε τέτοιες περιπτώσεις, από την θεωρία μέτρου (αποδεικνύουμε την συνεπαγωγή για δείκτριες τ.μ., κατόπιν για μη-αρνητικές τ.μ. και τέλος για τυχούσες τ.μ.).

(β) ($\Leftarrow$) Εάν $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $a\le b, c\le d$, τότε χρησιμοποιώντας γνωστή ιδιότητα της α.κ.σ.κ. έχουμε:

$$P\{a<X_1\le b,\ c<X_2\le d\}=F_{X_1,X_2}(b,d)-F_{X_1,X_2}(a,d)-F_{X_1,X_2}(b,c)+F_{X_1,X_2}(a,c)\overset{(\beta)}{=}$$

$$=F_{X_1}(b)F_{X_2}(d)-F_{X_1}(a)F_{X_2}(d)-F_{X_1}(b)F_{X_2}(c)+F_{X_1}(a)F_{X_2}(c)$$

$$=\left(F_{X_1}(b)-F_{X_1}(a)\right)\left(F_{X_2}(d)F_{X_2}(c)\right)$$

$$=P\{a<X_1\le b\}\cdot P\{c<X_2\le d\}$$

δηλαδή ισχύει η (α) που είναι ισοδύναμη με την ανεξαρτησία.

($\Rightarrow$) Εάν οι X_1,X_2 είναι ανεξάρτητες τότε ισχύει η (α).

Εάν $a,c\in\mathbb{R}$, $a\le x_1, c\le x_2$, τότε

$$P\{a<X_1\le x_1,\ c<X_2\le x_2\}=P\{a<X_1\le x_1\}\cdot P\{c<X_2\le x_2\}.$$

Παίρνοντας όρια και χρησιμοποιώντας την συνέχεια του πιθανοθεωρητικού μέτρου, έχουμε

$$\lim_{a\to-\infty}\lim_{c\to-\infty}P\{a<X_1\le x_1,\ c<X_2\le x_2\}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}P\{a<X_1\le x_1\}\cdot\lim_{c\to-\infty}P\{c<X_2\le x_2\}$$

$$\Rightarrow P\{-\infty<X_1\le x_1,\ -\infty<X_2\le x_2\}=P\{-\infty<X_1\le x_1\}\cdot P\{-\infty<X_2\le x_2\}$$

$$\Rightarrow F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2).$$

(γ) ($\Rightarrow$) Εάν οι τ.μ. X_1,X_2 είναι ανεξάρτητες και έστω ότι είναι συνεχείς τ.μ, τότε ισχύει η (β), δηλαδή:

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2),\quad \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}\,.$$

Παραγωγίζοντας την σχέση ως προς x_1,x_2 (στα σημεία συνέχειας (x_1,x_2) της $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$), έχουμε:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\Big(F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2)\Big)=\frac{\partial F_{X_1}(x_1)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial F_{X_2}(x_2)}{\partial x_2}=f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2)\,.$$

Ανάλογη είναι και η απόδειξη για διακριτές τ.μ.

($\Leftarrow$) Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει η (β). Έστω ότι οι τ.μ. X_1,X_2 είναι συνεχείς, τότε:

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}f_{X_1,X_2}(t_1,t_2)dt_1\,dt_2=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}f_{X_1}(t_1)f_{X_2}(t_2)dt_1\,dt_2=$$

$$=\int_{-\infty}^{x_1}f_{X_1}(t_1)dt_1\cdot\int_{-\infty}^{x_2}f_{X_2}(t_2)dt_2=F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2)\,.$$

δηλαδή ισχύει η (β), που είναι όπως δείξαμε ισοδύναμη με την ανεξαρτησία. ●

◆ Παρατήρηση 5.1.4

(α) Η έννοια της ανεξαρτησίας μπορεί να επεκταθεί σε:

(i) οποιοδήποτε ***πεπερασμένο*** πλήθος τ.μ. Οι τ.μ. λοιπόν $X_1,X_2,...,X_n$, ορισμένες στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο, καλούνται (στοχαστικά) ανεξάρτητες εάν:

$$P\{X_1\in B_1,X_2\in B_2,...,X_n\in B_n\}=P\{X_1\in B_1\}\cdot P\{X_2\in B_2\}\cdot\ldots\cdot P\{X_n\in B_n\}$$

$$\forall B_1,B_2,...,B_n\in\mathscr{B}(\mathbb{R})\,.$$

(ii) ***αριθμήσιμο πλήθος*** τ.μ. Οι τ.μ. $X_1,X_2,...,X_n,...$ καλούνται ανεξάρτητες εάν οι τ.μ $X_{i_1},X_{i_1},...,X_{i_k}$, $k\in\mathbb{N}$, $i_1,i_2,...,i_k=1,2,..(i_1\neq...\neq i_k)$ είναι ανεξάρτητες (δηλαδή εάν οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος από τις $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ είναι ανεξάρτητες).

(β) Είναι εύκολο να δειχθεί ότι, το θεώρημα 5.1.3 καθώς και προτάσεις και συμπεράσματα που αναφέρονται στην ανεξαρτησία δύο μεταβλητών, γενικεύονται και ισχύουν στην περίπτωση οποιουδήποτε πεπερασμένου (ακόμα και αριθμήσιμου, με κατάλληλη διατύπωση) πλήθους τ.μ.

(γ) Εάν οι τ.μ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, τότε είναι και ανά δύο ανεξάρτητες. Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Γενικότερα ισχύει η εξής πρόταση: ◆

■ Πρόταση

Εάν οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και f,g είναι δύο μετρήσιμες συναρτήσεις που ορίζονται στο $\mathbb{R}^n$, τότε οι τ.μ. $f(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ είναι ανεξάρτητες. ■

❖ Παράδειγμα 5.1.5

Έστω ότι η τ.μ. (X_1, X_2) είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στον μοναδιαίο κύκλο, οπότε η α.κ.π.π. τους είναι ίση με:

$$f_{X_1,X_2}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & 0 \le x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}.$$

Εάν θεωρήσουμε τα γεγονότα

$$A = \left\{ X_1 > \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}, \quad B = \left\{ X_2 > \frac{\sqrt{2}}{2} \right\},$$

τότε είναι φανερό ότι: $$P\left\{ X_1 > \frac{\sqrt{2}}{2}, X_2 > \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} = 0$$

ενώ $$P\left\{ X_1 > \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} = P\left\{ X_2 > \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

δηλαδή $P(A \cap B) \ne P(A) \cdot P(B)$, οπότε λόγω της 5.1.3(α), οι τ.μ. X_1, X_2 δεν είναι ανεξάρτητες. ❖

Κεφάλαιο 8

Περιγραφική Στατιστική

8.1 Εισαγωγή

Έστω ότι έχουμε ένα **σύνολο** από **αντικείμενα** και θέλουμε να το ***εξετάσουμε*** ως προς **ένα**, ή **περισσότερα** από τα **χαρακτηριστικά** του.

- Έχουμε τους *ψηφοφόρους* του Ελληνικού κράτους και θέλουμε να ξέρουμε το ποσοστό εκείνων που πρόκειται να ψηφίσει ένα συγκεκριμένο κόμμα σε μια εκλογική αναμέτρηση ή
- Έχουμε το σύνολο των ***φοιτητών*** ενός Πανεπιστημίου και θέλουμε να ξέρουμε τον αριθμό των μαθημάτων που περνούν επιτυχώς σε μια ακαδημαϊκή χρονιά ή
- Έχουμε το σύνολο των *ελαστικών αυτοκινήτου* που παράγει μια βιομηχανία και θέλουμε να γνωρίζουμε την απόκλιση στην διάρκεια ζωής τους από αυτή που αναφέρει ο εν λόγω κατασκευαστής.

Το σύνολο των αντικειμένων ονομάζεται **πληθυσμός** (population), το δε χαρακτηριστικό του, το οποίο μελετάμε το ονομάζουμε **μεταβλητή** και κάθε ένα από τα αντικείμενα του πληθυσμού καλείται **στατιστική μονάδα**.

Η **Στατιστική** είναι το κομμάτι εκείνο των Μαθηματικών που ασχολείται με την:

- **συλλογή**
- **καταγραφή**

- **ταξινόμηση**
- **ανάλυση**
- **παρουσίαση** *στοιχείων* που αφορούν την μεταβλητή ενός πληθυσμού
- την **εξαγωγή συμπερασμάτων** σχετικά με την μεταβλητή αυτή ή παραμέτρους της.

Τα στοιχεία αυτά ονομάζονται (στατιστικά) **δεδομένα** (data). Το μέρος της Στατιστικής που ασχολείται με:

- την **ανάλυση** και **παρουσίαση** των στοιχείων που αφορούν την μεταβλητή του πληθυσμού καλείται **Περιγραφική Στατιστική.**
- με την εξαγωγή συμπερασμάτων, καλείται **Επαγωγική Στατιστική**.

8.2 Μεταβλητές

Οι **μεταβλητές** ενός πληθυσμού χωρίζονται σε τρία είδη:

- **Ποσοτικές**: όταν οι *τιμές* της μεταβλητής είναι **αριθμητικές**. Π.χ.
    - ο αριθμός των παιδιών μιας οικογένειας,
    - ο αριθμός των δίσκων (CD) μουσικής που αγοράζει ένας καταναλωτής
    - το ποσό των χρημάτων που ξοδεύει κάποιος στις διακοπές του

  Οι ποσοτικές μεταβλητές χωρίζονται σε:
    - **Διακριτές**: αν το *πλήθος* των *τιμών* της μεταβλητής είναι *πεπερασμένο* ή το *πολύ αριθμήσιμο*. Ο αριθμός των παιδιών μιας οικογένειας ή ο αριθμός των δίσκων (CD) είναι διακριτές μεταβλητές.
    - **Συνεχείς**: αν το *πλήθος* των *τιμών* της μεταβλητής είναι *μη-αριθμήσιμο*. Το ποσό των χρημάτων ή το ποσό ενός τύπου αποβλήτων που εκπέμπει μια βιομηχανία είναι συνεχείς μεταβλητές (η μεταβλητή μπορεί θεωρητικά να πάρει όλες τις τιμές μεταξύ δύο τιμών).
- **Ποιοτικές**: οι *τιμές* της μεταβλητής είναι *μη-αριθμητικές* και *επιδέχονται* κάποιου είδους *διάταξη* π.χ. η διάκριση των καθηγητών ενός πανεπιστημίου σε τακτικούς, αναπληρωτές, επίκουρους ή λέκτορες είναι (υπάρχει ιεράρχηση στα κλιμάκια αυτά)
- **Κατηγορικές**: οι *τιμές* της μεταβλητής και σ’ αυτή την περίπτωση είναι *μη-αριθμητικές* αλλά *δεν* επιδέχονται κάποιου είδους *διάταξη*. Π.χ. το χρώμα των μαλλιών ενός ατόμου (μαύρο, καστανό, ξανθό κ.ο.κ.).

8.3 Συλλογή στατιστικών στοιχείων

Το πρώτο βήμα στην μελέτη της (μιας) μεταβλητής ενός πληθυσμού είναι η συλλογή των στατιστικών δεδομένων, των παρατηρήσεων (τιμών) δηλαδή της μεταβλητής για την οποία ενδιαφερόμαστε. Η συλλογή αυτή μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

Α. Απογραφή (census), όταν τα δεδομένα προκύπτουν από ***όλες*** τις μονάδες του πληθυσμού.

Μερικά από τα μειονεκτήματα των απογραφών είναι και τα εξής.

- Πολλές φορές αν και μια απογραφή είναι δυνατή είναι *άσκοπη*
  π.χ. αν ο ιδιοκτήτης μιας βιοτεχνίας κατασκευής πυροτεχνημάτων ήθελε να γνωρίζει το ποσοστό των πυροτεχνημάτων που είναι ελαττωματικά θα έπρεπε να τα εξετάσει (χρησιμοποιήσει) όλα, πράγμα φυσικά ανώφελο.
- Άλλες φορές, όταν ο πληθυσμός που πρόκειται να εξετάσουμε δεν είναι γνωστός, είναι πρακτικά *αδύνατη*.
- Το *κόστος* μιας απογραφής είναι συνήθως υψηλό (απαιτείται ειδική προετοιμασία για την πραγματοποίηση της, καθώς και ένα μεγάλο πλήθος εξειδικευμένων ατόμων για την εκτέλεσή της κ.α.).
- Ο αριθμός των *ειδικευμένων ατόμων* που απαιτούνται για την πραγματοποίησή της είναι συνήθως μεγάλος με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούνται και άτομα μη-ειδικευμένα. Αυτό έχει σαν συνέπεια την ύπαρξη σφαλμάτων στην συλλογή των δεδομένων οπότε έχουμε λάθος εικόνα για χαρακτηριστικά του πληθυσμού.
- Απαιτείται συνήθως αρκετός *χρόνος* για την επεξεργασία των (τόσο πολλών) δεδομένων, οπότε τα αποτέλεσμα χάνουν την επικαιρότητά τους.

Οι απογραφές διακρίνονται ανάλογα με τον τομέα του ενδιαφέροντός μας σε:

- **Οικονομικές Απογραφές:** στις οποίες συγκεντρώνονται στοιχεία αναφορικά με την οικονομική κατάσταση των στατιστικών μονάδων για τα οποία ενδιαφερόμαστε (π.χ. εισόδημα, δαπάνες, δάνεια κ.λπ.).
- **Βιομηχανικές Απογραφές:** στις οποίες συγκεντρώνονται στοιχεία αναφορικά με δραστηριότητες των Βιομηχανιών για τις οποίες ενδιαφερόμαστε (π.χ. εξαγωγές, αριθμός εργαζομένων, παραγωγή κ.λπ.).
- **Γεωργικές Απογραφές:** στις οποίες συγκεντρώνονται στοιχεία αναφορικά με την γεωργική παραγωγή (π.χ. έκταση καλλιεργούμενων εκτάσεων, είδος λι-

πασμάτων είδος καλλιέργειας κ.λπ.).
Απογραφή του πληθυσμού της Ελλάδας, γίνεται κάθε 10 χρόνια (την πρώτη χρονιά κάθε δεκαετίας, 1991, 2001).

Β. Δειγματοληψία (sampling), όταν τα δεδομένα προκύπτουν από ένα ***μέρος*** του πληθυσμού (*αντιπροσωπευτικό* υποσύνολο), το λεγόμενο **δείγμα**.

Η δειγματοληψία είναι συνήθως προτιμότερη της απογραφής για λόγους:

- ***κόστους***: συνήθως το κόστος είναι μικρότερο λόγω χρήσης μικρότερου αριθμού υπαλλήλων στην διεξαγωγή της έρευνας, λιγότερου υλικού κ.λπ.
- ***χρόνου***: ο χρόνος διεξαγωγής μιας δειγματοληψίας είναι κλάσμα του χρόνου που απαιτείται για μια απογραφή
- ***ακρίβειας***: γίνεται συνήθως καλύτερη εκπαίδευση των ερευνητών που πραγματοποιούν την δειγματοληψία, δίνεται μεγαλύτερη προσοχή σε κάθε μια από τις στατιστικές μονάδες κ.λπ.

Στην Ελλάδα **στατιστικά στοιχεία** *συλλέγονται* και δημοσιεύονται κυρίως από:

- Την **Ανεξάρτητη Στατιστική Αρχή** (πρώην **Εθνική Στατιστική Υπηρεσία** (Ε.Σ.Υ.Ε.)), συλλέγει στοιχεία που αφορούν τους περισσότερους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας τα οποία δημοσιεύει σε έντυπα όπως το **μηνιαίο στατιστικό δελτίο** και την **ετήσια στατιστική επετηρίδα**.
- **Τις εταιρείες δημοσκόπησης** (συλλέγουν συνήθως στοιχεία κατόπιν παραγγελίας των πολιτικών κομμάτων, της τηλεόρασης, των εφημερίδων, των περιοδικών κ.α.)
- **Επιστημονικά Ιδρύματα**, την **Τοπική Αυτοδιοίκηση, Εταιρείες** ή ακόμα και **μεμονωμένα άτομα**.

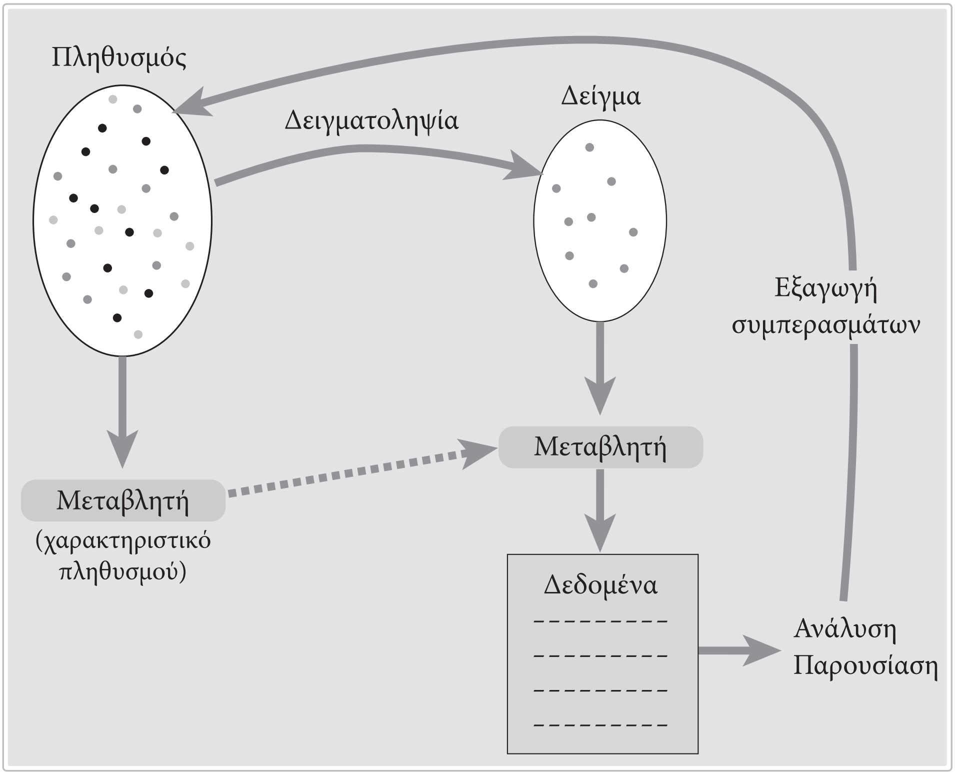
Στις χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης, στατιστικά στοιχεία συλλέγει και δημοσιεύει η **Eurostat**.

8.4 Στοιχεία δειγματοληψίας

Είδαμε παραπάνω ότι η συλλογή των στατιστικών δεδομένων (παρατηρήσεων) αναφορικά με μια μεταβλητή για την οποία ενδιαφερόμαστε, γίνεται συνήθως από ένα μέρος του πληθυσμού, το οποίο ονομάσαμε **δείγμα** (sample). Η καταγραφή των δεδομένων από το δείγμα ονομάζεται **δειγματοληψία** (sampling).

Σκοπός της δειγματοληψίας είναι λοιπόν η επιλογή ενός δείγματος, με την βοήθεια του οποίου θα «προσεγγίσουμε» την περιγραφή της μεταβλητής του πληθυσμού.

Σχηματικά, έχουμε:



Απαραίτητη προϋπόθεση για να γενικεύσει κανείς τα συμπεράσματα από το δείγμα στον πληθυσμό, είναι το δείγμα να είναι *αντιπροσωπευτικό* του πληθυσμού. Ο σχηματισμός ενός δείγματος γίνεται λαμβάνοντας υπ' όψιν:

- Η επιλογή των (στατιστικών) μονάδων ενός δείγματος να γίνεται συνήθως κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μια από αυτές τις μονάδες αυτές (του πληθυσμού) να έχει την *ίδια δυνατότητα* (πιθανότητα) να επιλεγεί. Η δειγματοληψία σ' αυτή την περίπτωση καλείται **τυχαία** (random). Είναι η προτιμότερη από τις δειγματοληψίες γιατί συνήθως παίρνουμε δείγματα αντιπροσωπευτικά και γιατί στην επαγωγή των συμπερασμάτων από το δείγμα στον πληθυσμό χρησιμοποιείται η Θεωρία Πιθανοτήτων.