Νίκος Δανίκας - Μιχ. Γ. Μαριάς

Μαθήματα Διαφορικού Λογισμού Πολλών Μεταβλητών

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Περιεχόμενα

Όπως τα πεύκα κρατούνε την μορφή του αγέρα,
ενώ ο αγέρας έφυγε, δεν είναι εκεί,
το ίδιο και τα λόγια,
φυλάγουν την μορφή του ανθρώπου...

Γ. Σεφέρης

Πρόλογος

Το ανά χείρας εγχειρίδιο είναι η τακτοποίηση των πρόχειρων σημειώσεών μας για το μάθημα του ''Διαφορικού Λογισμού ΙΙ'', που διδάσκουμε στο Τμήμα Μαθηματικών του ΑΠΘ. Έρχεται μετά τα '*Μαθήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού πολλών μεταβλητών*', που ο δεύτερος εξ ημών συνέγραψε με τον εκλεκτό συνάδελφο και φίλο Ν.Χ. Μαντούβαλο. Έτσι, συμπληρώνεται η άποψή μας για την διδακτική προσέγγιση και παρουσίαση του Λογισμού πολλών μεταβλητών. Η άποψή μας αυτή παρουσιάζεται στον Πρόλογο των 'Μαθημάτων Ολοκληρωτικού Λογισμού':

Δεν ήταν στις προθέσεις μας να γράψομε μια 'Πραγματεία', Traité που λένε οι Γάλλοι. Οι Πραγματείες είναι πιο χρήσιμες στους διδάσκοντες παρά στους διδασκόμενους. Ούτε ένα ογκώδες βοήθημα όπου ο αρχάριος είναι εύκολο να πελαγώσει και να χαθεί. *Νήπιοι, ουδέ ίσασιν όσω πλέον ήμισυ παντός*, έλεγε ο Ησίοδος στα *Έργα και Ημέραι.*[1] Έτσι, καταλήξαμε στην συγγραφή ενός σύντομου και ισορροπημένου συνόλου με μορφή φιλική για τον αναγνώστη.

Τα '*Μαθήματα*' αντλούν υλικό από διάφορες πηγές. '*Τα λόγια μας είναι παιδιά πολλών ανθρώπων*', για να θυμηθούμε τον ποιητή. Αναφέρομε ενδεικτικά τα εγχειρίδια των Γ. Γεωργανόπουλου και Π. Ξενικάκη, Τ. Χατζηαφράτη, Marsden και Tromba, τον μικρό Spivak.

[1] Είναι ανόητοι αυτοί που δεν γνωρίζουν ότι το μισό είναι περισσότερο του όλου. Σήμερα λέμε 'λίγα και καλά'.

Το υλικό παρουσιάζεται με τρόπο ζωντανό, θυμίζοντας πολλές φορές την ατμόσφαιρα του αμφιθεάτρου, ώστε να προκαλέσει το ενδιαφέρον της πλειονότητας των φοιτητών. Η προσέγγιση της ουσίας είναι άμεση και συνοδεύεται συνήθως από ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα, το *μοντέλο*, όπως λέμε στην ακαδημαϊκή καθομιλουμένη. Το περιττό, το φλύαρο και το κενό, που στην εποχή μας έχουν πάρει το πάνω χέρι, έγινε προσπάθεια να εξοβελιστούν.

Προσπαθήσαμε να κρατήσομε την ισορροπία ανάμεσα στην Ανάλυση και τον Λογισμό. Ο φοιτητής πρέπει να καταλάβει τις έννοιες και τα θεωρήματα, αλλά και να μάθει να λογαριάζει. Η έλλειψη του ενός εκ των δύο οδηγεί σε επικίνδυνες ατραπούς. Έτσι, όλα τα βαρειά θεωρήματα δίνονται με πλήρεις αποδείξεις. Η επεξεργασία των αποδείξεων, ώστε να παρουσιαστούν όσο το δυνατόν πιο καθαρές και εύληπτες, ήταν και χρονοβόρα και κουραστική. Ελπίζουμε να τα καταφέραμε. Αλλά αυτό θα μας το πουν οι φοιτητές μας. Τα θεωρήματα και οι ορισμοί συνοδεύονται από πληθώρα επιλεγμένων παραδειγμάτων, ώστε να εμπεδωθεί και να εφαρμοστεί η θεωρία, και να μάθει ο φοιτητής να λογαριάζει.

Πολλοί βοήθησαν και ποικιλοτρόπως, για να γραφτεί αυτό το εγχειρίδιο. Οι οικογένειες και οι φίλοι με την ανοχή και την κατανόησή τους. Οι συνάδελφοι με τις εποικοδομητικές συζητήσεις, και οι φοιτητές μας με τις ερωτήσεις, τις απορίες και τις εκφράσεις του προσώπου τους, που λένε πολλά. Τέλος, θέλομε να κάνομε ιδιαίτερη μνεία για την βοήθεια που μας προσέφερε ο φίλος και συνάδελφος Γιώργος Πέρρος. Το εγχειρίδιο αυτό του οφείλει πολλά. Γράφτηκε στο Ελληνικό LaTeX με ένα πολύ φιλικό και εύχρηστο κειμενογράφο που είναι πατέντα του Γιώργου. Η πιθανότητα να γράφαμε το βιβλίο με το κλασικό σύστημα TeX είναι μηδενική. Επίσης, ευχαριστούμε τον φίλο Παύλο Καϊμάκη που χτένισε τα Ελληνικά μας.

Θα τελειώσουμε με τα λόγια του Αποστόλου Παύλου που είναι πάντα επίκαιρα:

Και γαρ εάν άδηλον φωνήν σάλπιγξ δώ, τίς παρασκευάσεται εις πόλεμον; Ούτω και υμείς δια της γλώσσης εάν μη εύσημον λόγον δώτε, πώς *γνωσθήσεται το λαλούμενον; έσεσθε γαρ εις αέρα λαλούντες.* [2]

(Πρός Κορινθίους Α, XIV, 8-9)

Θεσσαλονίκη, Φθινόπωρο 2003.

[2] Σε ελεύθερη απόδοση το νόημα είναι το ακόλουθο: Αν η σάλπιγγα ηχήσει ήχο χωρίς νόημα, ποιός θα προετοιμαστεί για πόλεμο; Έτσι κι εσείς, εάν ο λόγος σας δεν είναι κατανοητός, πώς θέλετε να σας καταλάβουν; Θα μιλάτε στον αέρα.

Μέρος I

Συνεχείς συναρτήσεις

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Η παράγωγος στις πολλές διαστάσεις

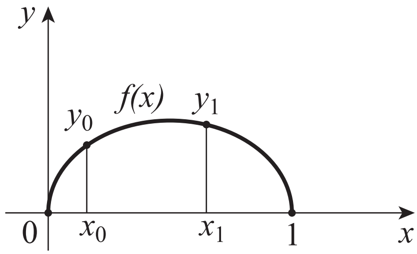
Το αντικείμενο μελέτης του βιβλίου αυτού είναι η διαφορισιμότητα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

Για να δώσουμε μια πρώτη αίσθηση των πραγμάτων, θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα από τη Φυσική, που περιγράφεται με την βοήθεια μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών. Κατόπιν θα εισάγομε και θα συζητήσομε εποπτικά τις έννοιες της συνέχειας, της ολικής παραγωγισιμότητας και της μερικής παραγωγισιμότητας. Δεν θα επιμείνουμε εδώ σε ακριβείς ορισμούς, αφού αυτοί θα δοθούν στα επόμενα κεφάλαια.

Ας ξεκινήσομε λοιπόν με Φυσική και με το παράδειγμα της *παλλόμενης χορδής*.

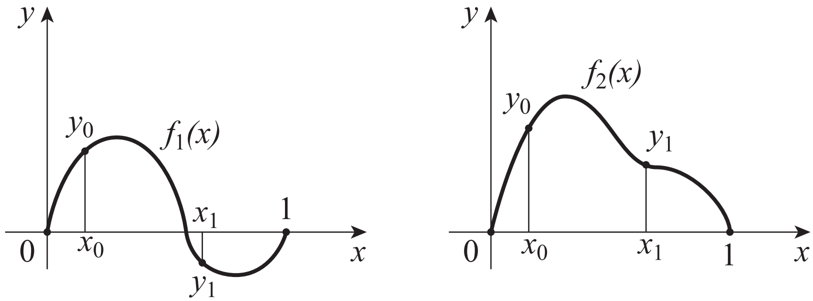
1.1.1 Το παράδειγμα της παλλόμενης χορδής

Ας υποθέσομε ότι κρατούμε την χορδή στην θέση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η αρχική θέση της χορδής.

Αν την αφήσομε, θα αρχίσει να πάλλεται και αν την κοιτάξομε τις στιγμές t_1 και $t_2 > t_1$ τότε θα βρίσκεται στις θέσεις $f_1(x)$ και $f_2(x)$ όπως στο σχήμα που ακολουθεί.



Οι θέσεις της χορδής τις στιγμές t_1 και t_2.

Διαπιστώνομε λοιπόν ότι η μετατόπιση y της χορδής από την θέση ηρεμίας $(y = 0)$, είναι συνάρτηση του σημείου x και του χρόνου t. Δηλαδή η μετατόπιση y είναι μια συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών $x \in [0,1]$ και $t \in [0,\infty)$. Γράφομε

$$y = y(x,t), \qquad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty),$$

ή

$$\begin{array}{ccc} [0,1] \times [0,\infty) & \xrightarrow{y} & \mathbb{R}, \\ (x,t) & \rightsquigarrow & y(x,t). \end{array}$$

Αν ανατρέξομε στην Φυσική, θα δούμε ότι το φαινόμενο της παλλόμενης χορδής περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$\partial_t^2 y\,(x,t) = \partial_x^2 y\,(x,t)\,. \tag{1.1}$$

Η (1.1) είναι μια από τις θεμελιώδεις εξισώσεις της Μαθηματικής Φυσικής και είναι γνωστή ως εξίσωση της παλλόμενης χορδής ή *εξίσωση των κυμάτων* . Τα σύμβολα $\partial_t^2 y\,(x,t)$ και $\partial_x^2 y\,(x,t)$ παριστάνουν τις 'μερικές παράγωγους δεύτερης τάξης της y ως προς t και x αντιστοίχως'.

Τι εκφράζουν όμως αυτές οι μερικές παράγωγοι; Και πώς λύνεται η εξίσωση της παλλόμενης χορδής;

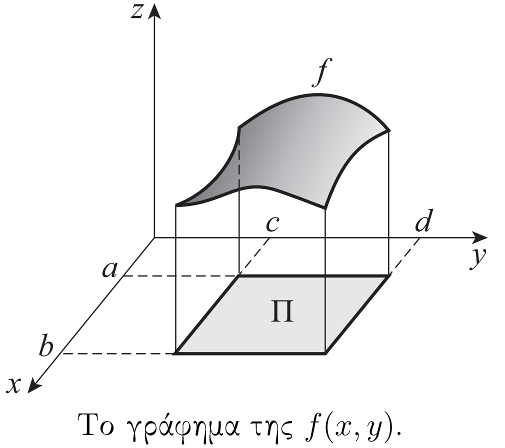
Ας πάμε σιγά, αφού πρώτη φορά ερχόμαστε σε επαφή με συναρτήσεις δύο μεταβλητών και ας δούμε μια πρώτη προσέγγιση των εννοιών αυτών κάπως διαισθητικά και με πολλά σχήματα.

1.1.2 Συνέχεια

Θεωρούμε λοιπόν μια *θετική* συνάρτηση $f\,(x,y)$ *δύο πραγματικών μεταβλητών*:

$$[a,b]\times[c,d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+.$$

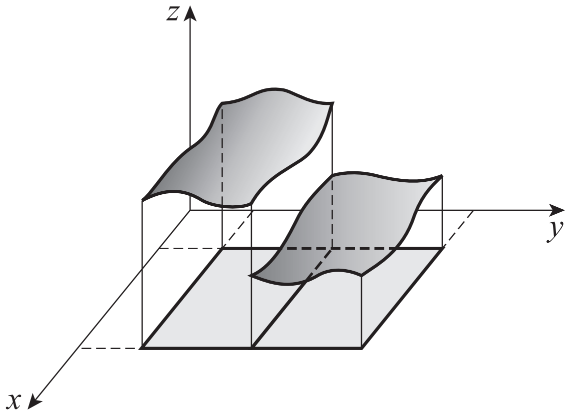
Το *γράφημα* της $f\,(x,y)$ είναι μια ''επιφάνεια πάνω από το ορθογώνιο $\Pi = [a,b]\times[c,d]$'' όπως βλέπουμε στο σχήμα.



Το γράφημα της $f(x,y)$.

Στο παραπάνω σχήμα, η επιφάνεια δεν παρουσιάζει ούτε τρύπες ούτε κοψίματα και κατ' αντιστοιχίαν με την διάσταση 1, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η f είναι συνεχής.

Απεναντίας, στο σχήμα που ακολουθεί, η επιφάνεια παρουσιάζει ένα κόψιμο. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο Π.



Το γράφημα μιας ασυνεχούς συνάρτησης.

Ας θυμηθούμε λίγο καλύτερα τα πράγματα της διάστασης 1. Η συνέχεια είναι μια έννοια *τοπική* και μία $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0, αν για κάθε ακολουθία x_n που συγκλίνει στο x_0, έχομε

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0).$$

Αν περάσομε τώρα στις δύο διαστάσεις και ας θεωρήσομε μια πραγματική συνάρτηση επί του ορθογωνίου $\Pi = [a,b] \times [c,d]$:

$$[a,b] \times [c,d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι:

Ορισμός 1.1 *Η* $f(x,y)$ είναι *συνεχής* στο (x_0,y_0), αν για κάθε ακολουθία (x_n,y_n) που συγκλίνει στο (x_0,y_0), έχομε

$$f(x_n,y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0,y_0).$$

Στον παραπάνω ορισμό, το τι θα πεί $f(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0, y_0)$, το ξέρομε αφού η $f(x_n, y_n)$ είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών. Μένει λοιπόν να διευκρινιστεί η σύγκλιση των διανυσμάτων

$$(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x_0, y_0).$$

Όμως, από την Γραμμική Άλγεβρα, έχομε μάθει ότι το επίπεδο $\mathbb{R}^2$ είναι το γινόμενο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ της πραγματικής ευθείας με τον εαυτό της. Συνεπώς είναι θεμιτό να πούμε ότι:

Η ακολουθία των διανυσμάτων (x_n, y_n) τείνει στο διάνυσμα (x_0, y_0) ανν οι συνιστώσες ακολουθίες x_n και y_n τείνουν αντίστοιχα στους αριθμούς x_0 και y_0.

Ας το μεταφράσομε στην γλώσσα της Μαθηματικής Ανάλυσης:

$$\begin{gathered}(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x_0, y_0) \quad \text{ανν} \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ τ.ω. για } n \geq N(\varepsilon) \\ |x_n - x_0| \leq \varepsilon \quad \text{και} \quad |y_n - y_0| \leq \varepsilon.\end{gathered}$$

Ας κάνομε τώρα την ακόλουθη παρατήρηση:

Αν η απόστασεις $|x_n - x_0|$ και $|y_n - y_0|$ των συνιστωσών των διανυσμάτων (x_n, y_n) και (x_0, y_0) είναι πολύ μικρές, ας πούμε μικρότερες του ε, τότε η *ευκλείδεια απόστασή* τους ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} d\left((x_n, y_n), (x_0, y_0)\right) &= \|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)\| \\ &= \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \\ &\leq \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} = \sqrt{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

Έτσι και η ευκλείδεια απόσταση των διανυσμάτων (x_n, y_n) και (x_0, y_0) είναι πολύ μικρή.

Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσομε την ευκλείδεια απόσταση στον ορισμό της συνέχειας και να πούμε, όπως ακριβώς στην διάσταση 1, ότι

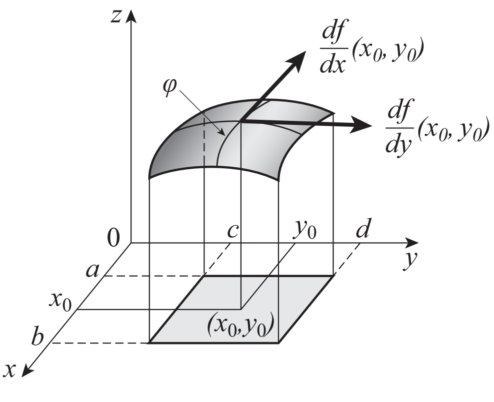
Ορισμός 1.2 Η $f(x,y)$ είναι *συνεχής* στο (x_0,y_0) αν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta(\varepsilon)>0$ τ.ω. αν

$$\|(x,y)-(x_0,y_0)\|\le\delta(\varepsilon), \quad \text{τότε} \quad |f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le\varepsilon.$$

1.1.3 Μερικές παράγωγοι και ολική παράγωγος

Ας επανέλθομε στο γράφημα της $f(x,y)$, για να εξηγήσομε τι είναι οι *μερικές παράγωγοι της* $f(x,y)$ *ως προς* x *ή* y που είδαμε πως παρουσιάζονται στην διαφορική εξίσωση της παλλόμενης χορδής.

Ας κοιτάξομε το Σχήμα 1.1. Σταθεροποιούμε ένα $y_0\in(c,d)$ και θεωρούμε την τομή του γραφήματος της f με το επίπεδο P που περνά από το y_0 και είναι παράλληλο με το επίπεδο xOz.



Σχήμα 1.1: Οι μερικές παράγωγοι της $f(x,y)$.

Η τομή του επιπέδου P με το γράφημα της f είναι η καμπύλη φ του σχήματος, που δεν είναι άλλο από το γράφημα της συνάρτησης

$$\begin{array}{lcl} [a,b] & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}, \\ x & \rightsquigarrow & \varphi(x)=f(x,y_0). \end{array}$$

Αν η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη, τότε γράφομε

$$\varphi'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

και λέμε ότι η $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ είναι η μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο (x_0, y_0). Ο υπολογισμός της είναι μονοδιάστατος και συνήθως απλός. Αν π.χ.

$$f(x, y) = \text{ημ}(xy)\, e^y,$$

για να υπολογίσομε την $\frac{\partial f}{\partial x}$ θεωρούμε το y σταθερά και παραγωγίζομε ως προς x κατά τα γνωστά. Έτσι έχομε:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\,\text{συν}(xy)\, e^y.$$

Προφανώς, ότι είπαμε για το x, ισχύει και για το y και έτσι ορίζομε ανάλογα την μερική παράγωγο

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \psi'(x_0),$$

όπου

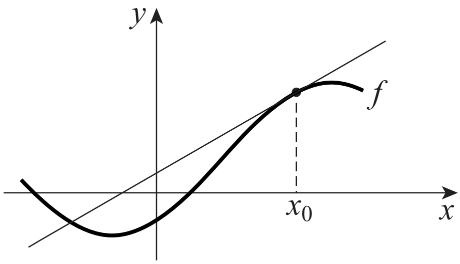
$$\psi(y) = f(x_0, y).$$

Για το παραπάνω παράδειγμα, θεωρώντας το x σταθερό, έχομε:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\,\text{συν}(xy)\, e^y + \text{ημ}(xy)\, e^y.$$

Για τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης παραγωγίζομε τις $\frac{\partial f}{\partial x}$ ή $\frac{\partial f}{\partial y}$ αναλόγως. Έτσι

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(x, y) = \left(y\,\text{συν}(xy)\, e^y\right)'_x \\ &= -y^2\,\text{ημ}(xy)\, e^y,\end{aligned}$$



Σχήμα 1.2: Η εφαπτόμενη της $f(x)$.

ενώ

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(x,y) = \left(x\,\text{συν}\,(xy)\,e^y + \text{ημ}\,(xy)\,e^y\right)'_y \\ &= -x^2\,\text{ημ}\,(xy)\,e^y + x\,\text{συν}\,(xy)\,e^y \\ &+ x\,\text{συν}\,(xy)\,e^y + \text{ημ}\,(xy)\,e^y.\end{aligned}$$

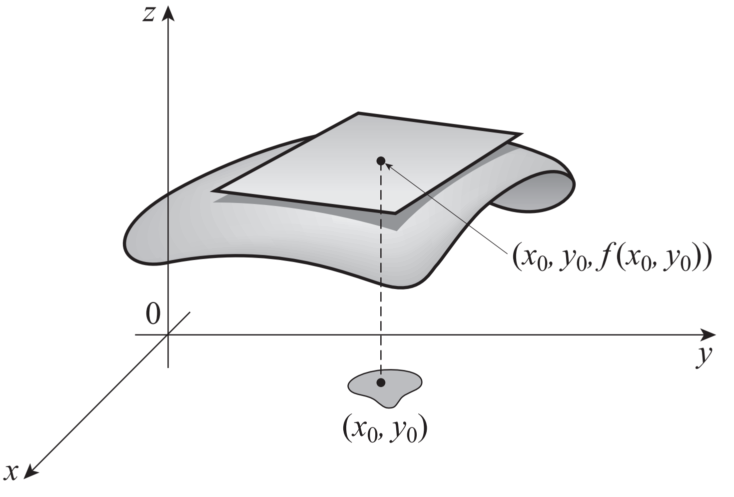
Φτάσαμε λοιπόν στο σημείο να καταλάβουμε την εξίσωση της παλλόμενης χορδής

$$\partial_t^2 y\,(x,t) = \partial_x^2 y\,(x,t)\,.$$

Για να την λύσουμε όμως έχομε να κάνομε ακόμα δρόμο και πρέπει να φτάσομε ως τις Σειρές Fourier.

Τελειώνομε αυτό το πρώτο μάθημα με την προσπάθεια να δούμε τι μπορεί να είναι η ‘‘*ολική*’’ παράγωγος μιας $f\,(x,y)$ αφού οι $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ είναι μόνο *μερικές*. Θα προσεγγίσομε το θέμα μας γεωμετρικά. Στην διάσταση 1, μια συνάρτηση $f\,(x)$ είναι διαφορίσιμη στο x_0 αν το γράφημά της έχει εφαπτομένη στο σημείο $(x_0, f\,(x_0))$.

Η εφαπτομένη ορίζεται από την παράγωγο f' αφού η κλίση της εφαπτομένης στο $(x_0, f\,(x_0))$ ισούτε με $f'\,(x_0)$, (δες Σχήμα 1.2). Ανάλογα, η $f\,(x,y)$ θα είναι διαφορίσιμη στο σημείο (x_0, y_0), αν το γράφημα της έχει *εφαπτόμενο επίπεδο* στο σημείο $((x_0, y_0)\,, f\,(x_0, y_0))$, (δες Σχήμα 1.3).



Σχήμα 1.3: Το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f.

Επιπλέον, από το Σχήμα 1.1, διαπιστώνομε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο ορίζεται από τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Συνεπώς τα σημεία (x, y, z), που βρίσκονται επί του εφαπτομένου επιπέδου ικανοποιούν την εξίσωση:

$$z = f\left(x_0, y_0\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)\left(x - x_0\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)\left(y - y_0\right).$$

Δυστυχώς, η ύπαρξη και μόνον των μερικών παραγώγων δεν εξασφαλίζει την ''διαφορισιμότητα'' της $f(x, y)$ στο (x_0, y_0). Γι' αυτό, ένα απλό παράδειγμα θα μας πείσει. Θεωρούμε την συνάρτηση ''σταυρό''

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x = 0 \text{ ή } y = 0, \\ \\ 0, & \qquad \text{αλλού.} \end{cases}$$

Ο σταυρός δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$, άρα δεν είναι ούτε ''διαφορίσιμη'' αφού η διαφορισιμότητα είναι έννοια ισχυρή και συνεπάγεται την συνέχεια. Παρ' όλα αυτά, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Έτσι, το επίπεδο που ορίζουν οι μερικές παράγωγοι, δηλαδή το επίπεδο $z = 1$, δεν είναι το εφαπτόμενο του σταυρού στο $(0,0)$ αφού απέχει πολύ από το γράφημα της f.

Πέραν λοιπόν της προϋπόθεσης της ύπαρξης των μερικών παραγώγων, χρειαζόμαστε *κάτι παραπάνω* για να πούμε ότι μια συνάρτηση $f(x,y)$ δύο μεταβλητών είναι διαφορίσιμη σ' ένα σημείο (x_0, y_0).

Μια τέτοια πρϋπόθεση, που εξασφαλίζει και την συνέχεια της f, είναι ''η επιφάνεια του γραφήματος και το εφαπτόμενο επίπεδο να είναι κοντά γύρω από το $z_0 = f(x_0, y_0)$''. Με άλλα λόγια, αν το (x,y) είναι κοντά στο (x_0, y_0), τότε για τα $(x,y,z) \in E$ να ισχύει:

$$f(x,y) - z \sim \varepsilon d((x,y),(x_0,y_0))$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} &f(x,y) - \left(f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right) \\ &\sim \varepsilon d((x,y),(x_0,y_0)). \end{aligned}$$

Αν ορίσομε την *κλίση* της f ως το διάνυσμα

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right),$$

τότε η ως άνω σχέση γράφεται ως

$$\begin{aligned} f(x,y) \sim f(x_0,y_0) &+ \langle \nabla f(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0) \rangle \\ &+ \varepsilon d((x,y),(x_0,y_0)). \end{aligned}$$

Αυτή είναι τελικά η συνθήκη παραγωγισιμότητας της $f(x,y)$ στο σημείο (x_0, y_0) και η ''ολική'' παράγωγος της f στο σημείο (x_0, y_0) είναι το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(x_0, y_0)$.

Κεφάλαιο 2

Συνέχεια συναρτήσεων

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσομε την συνέχεια πραγματικών αλλά και διανυσματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών και θα αποδείξομε τα θεωρήματα των άκρων και των ενδιαμέσων τιμών για συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις. Θα τελειώσομε με την έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας και την σχέση συνέχειας και συμπάγειας.

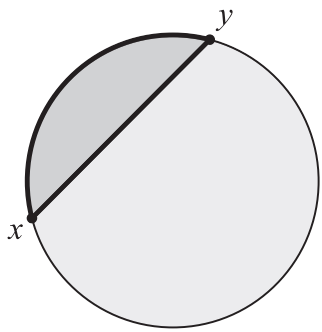
2.1 Τοπολογία των Ευκλειδείων χώρων

Όπως είδαμε στην Εισαγωγή, για να μελετήσομε την συνέχεια συναρτήσεων δύο ή και περισσοτέρων μεταβλητών, χρειαζόμαστε να ορίσομε την σύγκλιση μιας ακολουθίας διανυσμάτων ή ισοδύναμα την *απόσταση* δύο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$.

Αν $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ είναι δύο σημεία του $\mathbb{R}^n$, τότε η ευκλείδεια απόστασή τους $d(x, y)$ είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που τα ενώνει, δηλαδή

$$d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Όπως θα δείτε και στο μάθημα της Τοπολογίας, συνήθως έχομε αρκετούς και διαφορετικούς τρόπους να μετράμε την απόσταση δύο σημείων



Σχήμα 2.1: Η χορδή και το τόξο ορίζουν αποστάσεις στον κύκλο.

ενός χώρου. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αυτό του κύκλου, (δες Σχήμα 2.1).
Μπορούμε να πούμε ότι η απόσταση των σημείων x και y του κύκλου που βλέπουμε στο Σχήμα 2.1, είναι ή το *μήκος του τόξου* xy ή το *μήκος της αντίστοιχης χορδής*.

Ορισμός 2.1 Έστω $\mathbb{X}$ ένα σύνολο και d μία θετική συνάρτηση επί του καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$. Η d λέγεται *απόσταση* επί του συνόλου $\mathbb{X}$, αν ικανοποιεί τις κάτωθι τρείς ιδιότητες:

1. $d(x, y) = 0$ ανν $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall\ x, y \in \mathbb{X}$, και
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{X}$, (τριγωνική ιδιότητα).

Θυμίζομε ότι τρείς παραπάνω ιδιότητες ικανοποιούνται στον $\mathbb{R}$ από την απόλυτη τιμή $d(x, y) = |x - y|$, που είναι και η απόσταση που χρησιμοποιούμε στην πραγματική ευθεία.

Στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$, χρησιμοποιούμε συνήθως, εκτός της ευκλείδειας απόστασης

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

και τις ακόλουθες δύο: την

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|,$$

και την

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

Να δείξομε ότι οι d_1 και d_∞ είναι αποστάσεις, ότι δηλαδή ικανοποιούν τις προϋποθέσεις 1, 2 και 3 του ορισμού, είναι σχετικά εύκολο. Για να δείξομε ότι η ευκλείδεια απόσταση d ικανοποιεί την τριγωνική ιδιότητα χρειαζόμαστε την ανισότητα των Cauchy-Schwarz.

Πρόταση 2.2 (ανισότητα Cauchy-Schwarz) *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *ισχύει*

$$|\langle x,y\rangle| \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2} = \|x\|\,\|y\|. \quad (2.1)$$

Απόδειξη Αν τα x και y είναι συγραμμικά, δηλαδή αν $y = \lambda x$, τότε

$$|\langle x,y\rangle| = |\lambda|\,|\langle x,x\rangle| = |\lambda|\,\|x\|^2 = \|x\|\,\|\lambda x\| = \|x\|\,\|y\|,$$

και η (2.1) είναι ισότητα.

Αν τώρα τα x και y είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε

$$x - \lambda y \neq 0, \qquad \forall\, \lambda \neq 0.$$

Συνεπώς

$$\|x - \lambda y\|^2 > 0.$$

Όμως

$$\begin{aligned}\|x - \lambda y\|^2 &= \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 - 2\lambda\langle x,y\rangle > 0.\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ένα τριώνυμο του λ που είναι πάντα θετικό. Άρα η διακρίνουσα του είναι αρνητική:

$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2 < 0,$$

ή

$$|\langle x, y\rangle| < \|y\|\,\|x\|\,.$$

■

Πρόταση 2.3 *Η συνάρτηση*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

είναι μια απόσταση του $\mathbb{R}^n$ και λέγεται ευκλείδεια απόσταση.

Απόδειξη Θα δείξομε μόνο την τριγωνική ανισότητα. Οι άλλες δύο ιδιότητες έχουν προφανή απόδειξη.

Έστω x, y, z τρία διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Πρέπει να δείξομε ότι

$$\|x - z\| \le \|x - y\| + \|y - z\|$$

ή ισοδύναμα

$$\|x - z\|^2 \le \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\|x - y\|\,\|y - z\|\,.$$

Έχομε

$$\begin{aligned}
\|x - z\|^2 &= \|(x - y) + (y - z)\|^2 \\
&= \langle (x - y) + (y - z), (x - y) + (y - z)\rangle \\
&= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\langle (x - y), (y - z)\rangle \\
&\le \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\|x - y\|\,\|y - z\|
\end{aligned}$$

από την ανισότητα των Cauchy-Schwarz. ■

2.1.1 Σύγκλιση ακολουθιών

Έστω (x_k) μια ακολουθία στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ και δ μία από τις αποστάσεις d, d_1 ή d_∞ που είδαμε παραπάνω. Λέμε ότι η ακολουθία (x_k) συγκλίνει στο x κατά την απόσταση δ αν $\delta\left(x_k, x\right) \longrightarrow_{k\to\infty} 0$, ή ισοδύναμα

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \text{τ.ω. } \delta\left(x_k, x\right) \leq \varepsilon \text{ αν } k \geq N(\varepsilon).$$

Γράφομε

$$x_k \underset{k\to\infty}{\overset{\delta}{\longrightarrow}} x.$$

Οι Προτάσεις που ακολουθούν, λύνουν πολλά από τα ερωτήματα που ίσως έχουν προκύψει.

Πρόταση 2.4 *Αν δ είναι μία από τις αποστάσεις d, d_1 ή d_∞ του $\mathbb{R}^n$ και*

$$(x_k) = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$$

μια ακολουθία στοιχείων του $\mathbb{R}^n$, τότε $x_k \overset{\delta}{\longrightarrow}_{k\to\infty} x$ ανν κάθε συνιστώσα ακολουθία $x_{kj} \longrightarrow_{k\to\infty} x_j$.

Απόδειξη Θα δώσομε την απόδειξη για μια από τις αποστάσεις, π.χ. για $\delta = d_1$. Για τις άλλες η απόδειξη είναι πανομοιότυπη.

Έστω λοιπόν ότι $x_k \overset{d_1}{\longrightarrow}_{k\to\infty} x$, δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$, $\exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τ.ω.

$$d_1\left(x_k, x\right) = \left|x_{k1} - x_1\right| + \left|x_{k2} - x_2\right| + \cdots + \left|x_{kn} - x_n\right| \leq \varepsilon, \tag{2.2}$$

αν $k \geq N(\varepsilon)$.

Από την (2.2) συμπεραίνομε αμέσως ότι για κάθε $j \leq n$,

$$\left|x_{kj} - x_j\right| \leq \varepsilon,$$

αν $k \geq N(\varepsilon)$, δηλαδή $x_{kj} \longrightarrow_{k\to\infty} x_j$.

Αν τώρα υποθέσομε ότι $x_{kj} \longrightarrow_{k\to\infty} x_j$ για κάθε $j \leq n$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, $\exists\ N_j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τ.ω.

$$\left|x_{kj} - x_j\right| \leq \frac{\varepsilon}{n}, \tag{2.3}$$

αν $k \geq N_j(\varepsilon)$. Αν όμως $k \geq \max N_j(\varepsilon)$, τότε οι ανισότητες (2.3) ισχύουν συγχρόνως και συνεπώς

$$\begin{aligned} d_1(x_k, x) &= |x_{k1} - x_1| + |x_{k2} - x_2| + \cdots + |x_{kn} - x_n| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{n} + \cdots + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon, \end{aligned}$$

αν $k \geq \max N_j(\varepsilon)$, δηλαδή $x_k \xrightarrow{d_1}_{k\to\infty} x$. ■

Πόρισμα 2.5 *Για κάθε ακολουθία x_k στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι*

$$x_k \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow x_k \xrightarrow{d_1} x \Leftrightarrow x_k \xrightarrow{d_\infty} x,$$

και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιούμε αδιακρίτως όποια από τις αποστάσεις μας βολεύει καλύτερα.

Πόρισμα 2.6 (Πληρότητα του $\mathbb{R}^n$) *Μία ακολουθία στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ συγκλίνει ανν είναι Cauchy.*

Απόδειξη Έστω ότι η $x_k \xrightarrow{\delta}_{k\to\infty} x$. Από την Πρόταση 2.4 έχομε ότι κάθε συνιστώσα ακολουθία $(x_{kj})_k$ συγκλίνει. Συνεπώς είναι και Cauchy, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$, $\exists\ N_j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$|x_{kj} - x_{mj}| \leq \varepsilon, \quad \text{για κάθε} \quad k, m \geq N_j(\varepsilon). \tag{2.4}$$

Αν τώρα πάρομε $N(\varepsilon) = \max N_j(\varepsilon)$, τότε οι ανισότητες (2.4) ισχύουν συγχρόνως και συνεπώς

$$\begin{aligned} d_1(x_k, x_m) &= |x_{k1} - x_{m1}| + \cdots + |x_{kn} - x_{kn}| \\ &\leq n\varepsilon = \varepsilon', \end{aligned}$$

για $k, m \geq N(\varepsilon)$, δηλαδή η (x_k) είναι Cauchy.

Η απόδειξη της αντίθετης φοράς είναι πανομοιότυπη και αφήνεται ως άσκηση. ■

Παρατήρηση 2.7 Το παραπάνω Πόρισμα είναι πολύ σημαντικό. Μας επιτρέπει να συμπεράνομε αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα χωρίς να μπούμε, στην συνήθως επίπονη διαδικασία να μαντέψομε και να υπολογίσουμε το όριό της.

Στην γλώσσα των Τοπολόγων, ένας χώρος όπου οι ακολουθίες Cauchy είναι συγκλίνουσες, λέγεται *πλήρης*.

2.1.2 Τοπολογικές ιδιότητες των συνόλων του $\mathbb{R}^n$

Θα μελετήσομε ορισμένες τοπολογικές ιδιότητες των συνόλων του $\mathbb{R}^n$ που παίζουν σημαντικό ρόλο στην συμπεριφορά των συνεχών συναρτήσεων.

Ας ξεκινήσομε με ένα συμβολισμό. Αν $x \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$, η *ανοικτή μπάλλα* με κέντρο το x και ακτίνα r είναι το σύνολο

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\},$$

και η *κλειστή* το σύνολο

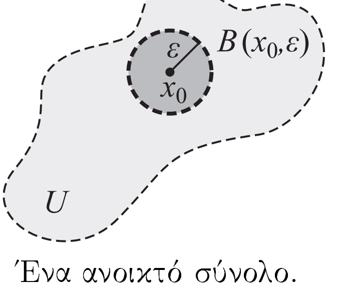
$$\overline{B(x,r)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}.$$

Θα ξεκαθαρίσομε αμέσως τις έννοιες ανοικτό και κλειστό σύνολο.

Ορισμός 2.8 Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται *ανοικτό* αν για κάθε $x \in A$, $\exists\ \varepsilon(x) > 0$ τ.ω.

$$B(x, \varepsilon(x)) \subset A.$$

Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται *κλειστό* αν είναι το συμπλήρωμα ενός ανοικτού.



Ένα ανοικτό σύνολο.

Η παρακάτω πρόταση δικαιολογεί πλήρως τον όρο ‘‘κλειστό σύνολο’’.

Πρόταση 2.9 *Αν $K \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό και (x_k) ακολουθία στοιχείων του K που συγκλίνει στο x, τότε το $x \in K$.*

Απόδειξη Με άτοπο. Έστω ότι $x \notin K$. Άρα το x ανήκει στο συμπλήρωμά του K^c. Όμως το K^c είναι ανοικτό και από τον ορισμό μπορούμε να βρούμε ένα $\varepsilon(x) > 0$ τ.ω.

$$B(x, \varepsilon(x)) \subset K^c.$$

Τώρα, η $x_k \longrightarrow x$ και συνεπώς, για το $\varepsilon(x)$ που διαλέξαμε, υπάρχει δείκτης $N(\varepsilon(x))$ τ.ω.

$$d(x, x_k) \leq \frac{\varepsilon(x)}{2}, \quad \text{για κάθε } k \geq N(\varepsilon(x)),$$

δηλαδή

$$x_k \in \overline{B\left(x, \frac{\varepsilon(x)}{2}\right)} \subset B(x, \varepsilon(x)) \subset K^c,$$

άτοπο, αφού όλα τα x_k ανήκουν στο K. ∎

Η παραπάνω ιδιότητα είναι χαρακτηριστική των κλειστών συνόλων. Δεν ισχύει στα ανοικτά. Πάρτε π.χ. την ανοικτή μπάλλα $B(0,1)$ του $\mathbb{R}^2$ και την ακολουθία

$$\left(1 - \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (1,0) \notin B(0,1).$$

Ορισμός 2.10 Ένα σύνολο $F \subset \mathbb{R}^n$ είναι *φραγμένο* αν υπάρχει $R > 0$ τ.ω.

$$F \subset B(0, R).$$

Ένα σύνολο $C \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται *συμπαγές* αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Η πρόταση που ακολουθεί είναι χαρακτηριστική των συμπαγών.

Πρόταση 2.11 *Αν* $(x_k)_k$ *είναι ακολουθία στοιχείων του συμπαγούς* C*, τότε υπάρχει υπακολουθία* $(x_{k_m})_m$ *της* (x_k) *που συγκλίνει και μάλιστα μέσα στο* C*.*

Απόδειξη Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε ένα γνωστό αποδεικτικό μέσο της Ανάλυσης, το διαγώνιο επιχείρημα.

Το C ως συμπαγές είναι και φραγμένο. Άρα υπάρχει $R > 0$ τ.ω $C \subset B(0, R)$. Άρα $(x_k) \in B(0, R)$ και συνεπώς

$$\|x_k\| \leq R, \ \forall \ k \in \mathbb{N}.$$

Το ίδιο ισχύει για όλες τις συνιστώσες:

$$|x_{kj}| \leq R, \ \ \text{για κάθε } j \leq n \ \ \text{και για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Τώρα, έχομε την πρώτη συνιστώσα ακολουθία (x_{k1}) φραγμένη. Άρα, υπάρχει μια υπακολουθία της, ας πούμε η $(x_{k_\alpha 1})_\alpha$, που συγκλίνει στο x_1 καθώς το $\alpha \to \infty$. Συνοπτικά

$$x_{k_\alpha 1} \underset{\alpha \to \infty}{\longrightarrow} x_1.$$

Στην συνέχεια, θεωρούμε την υπακολουθία $(x_{k_\alpha 2})_\alpha$ της δεύτερης συνιστώσας ακολουθίας. Είναι και αυτή φραγμένη. Άρα υπάρχει υπακολουθία της $(x_{k_\alpha 2})_\alpha$, ας πούμε η $\left(x_{k_\beta 2}\right)_\beta$, που συγκλίνει στο x_2 καθώς το $\beta \to \infty$. Συνοπτικά

$$x_{k_\beta 2} \underset{\beta \to \infty}{\longrightarrow} x_2.$$

Συνεχίζομε με τον ίδιο τρόπο και φτάνομε να βρούμε υπακολουθία $(x_{k_m n})_m$ της $n-$οστής συνιστώσας ακολουθίας που συγκλίνει στο x_n. Είναι ουσιαστικό να θυμόμαστε ότι οι δείκτες k_m είναι υποσύνολο των δεικτών k_α, k_β. Έτσι, η ακολουθία $(x_{k_m 1})$ είναι υπακολουθία της $(x_{k_\alpha 1})$, η $(x_{k_m 2})$ είναι υπακολουθία της $\left(x_2^{k_\beta}\right)$ κ.ο.ξ.

Συνολικά έχομε:

την $(x_{k_m 1})_m$, υπακολουθία της $x_{k_\alpha 1} \underset{\alpha \to \infty}{\longrightarrow} x_1$. Άρα $x_{k_m 1} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} x_1$.

Την $(x_{k_m 2})_m$, υπακολουθία της $x_{k_\beta 2} \underset{\beta\to\infty}{\longrightarrow} x_2$. Άρα $x_{k_m 2} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x_2$.

....

Την $x_{k_m n} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x_n$.

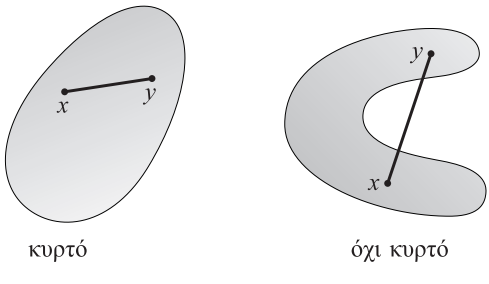
Άρα η υπακολουθία

$$(x_{k_m 1}, x_{k_m 2}, \ldots, x_{k_m n})_m$$

της αρχικής μας ακολουθίας, συγκλίνει στο $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Όμως, το C, ως συμπαγές, είναι και κλειστό. Άρα $x \in C$. ∎

Τελειώνουμε αυτή την παράγραφο, αναφερόμενοι στα κυρτά και συνεκτικά (κατά τόξα) σύνολα.

Ορισμός 2.12 Ένα σύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται *κυρτό* αν περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει κάθε ζεύγος στοιχείων του.



Η *παραμετροποίηση* του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει το x με το y είναι ως γνωστόν η ακόλουθη:

$$(1-t)\,x + ty, \qquad t \in [0,1]\,.$$

Συνεπώς, το B είναι κυρτό αν για κάθε $x, y \in B$, τότε το

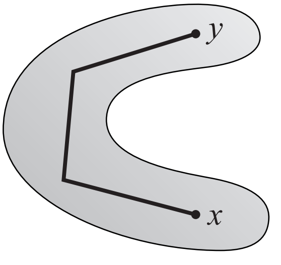
$$(1-t)\,x + ty \in B, \quad \text{για κάθε } t \in [0,1]\,.$$

Ας έχομε κατά νούν ότι το αρχέτυπο ενός κυρτού συνόλου είναι ένα αυγό ή ένα πεπόνι.

Μια άλλη έννοια, πιο ασθενής από αυτήν του κυρτού συνόλου, είναι η ακόλουθη

Ορισμός 2.13 Ένα σύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται *συνεκτικό κατά τόξα,* αν για κάθε ζεύγος στοιχείων του, υπάρχει μια συνεχής καμπύλη γ που τα ενώνει και που βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο B.

Ένα σύνολο συνεκτικό κατά τόξα, είναι *υποχρεωτικά* ένα μόνο κομμάτι.



Ένα σύνολο συνεκτικό κατά τόξα.

Επισημαίνομε ότι η ημισέληνος είναι συνεκτικό κατά τόξα αλλά όχι και κυρτό. Όμως, κάθε κυρτό είναι και συνεκτικό κατά τόξα. Άρα η έννοια του κυρτού είναι ισχυρότερη του συνεκτικού κατά τόξα.

2.2 Όρια και Συνέχεια συναρτήσεων

Ξεκινάμε με τον ορισμό του *ορίου* πραγματικής συνάρτησης σε σημείο.

Ορισμός 2.14 Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ και

$$A - \{x_0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Λέμε ότι η f έχει όριο το α καθώς το x τείνει στο x_0, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\eta(\varepsilon) > 0$ τ.ω.

$$\text{αν} \quad \|x - x_0\| \leq \eta, \quad \text{τότε} \quad |f(x) - \alpha| \leq \varepsilon. \tag{2.5}$$

Γράφομε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \quad \text{ή} \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \alpha.$$

Χωρίς προς το παρόν να εξηγήσομε τίποτα παραπάνω, ας δώσομε ένα παράδειγμα όπου χρησιμοποιούμε το αλγεβρικό μέρος του ορισμού.

Παράδειγμα 2.15 Έστω

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \quad \text{αν} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0.$$

Λύση Θα προσπαθήσομε να κάνομε όσο μικρή θέλομε την διαφορά $|f(x, y) - 0|$. Έχομε

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 |x| + y^2 |y|}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Όμως

$$|x| \quad \text{και} \quad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &\leq \frac{x^2 \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Αν λοιπόν για το δοθέν ε, διαλέξομε $\eta = \varepsilon$, τότε για τα (x, y) που ικανοποιούν

$$\|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \eta,$$

ισχύει

$$|f(x,y) - 0| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \eta = \varepsilon.$$

■

Όπως είδαμε και στην διάσταση 1, η έννοια του ορίου συνάρτησης σε σημείο είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την συνέχεια της συνάρτησης στο εν λόγω σημείο. Δίνομε αμέσως τον ορισμό της συνέχειας για να μελετήσομε μαζί τις δύο αυτές έννοιες.

Ορισμός 2.16 Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και

$$A \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

1. Λέμε ότι η f είναι *συνεχής* στο σημείο $x_0 \in A$, αν

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

   δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\eta(\varepsilon, x_0) > 0$ τ.ω. αν

   $$\|x - x_0\| \leq \eta, \quad \text{τότε} \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon. \tag{2.6}$$

2. Η f είναι *συνεχής σ' όλο το A* αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.

Παράδειγμα 2.17 Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - \text{ημ}^3\, y}{x^2 + y^2}, & \text{αν} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha, & \text{στο} \quad (0,0). \end{cases}$$

Για ποιές τιμές του α η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Λύση Για να έχομε την συνέχεια της f στο $(0,0)$, πρέπει να έχομε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \alpha.$$

Ας μαντέψομε πρώτα το ως άνω όριο δίνοντας *ειδικές* τιμές στο (x,y). Π.χ. για τα σημεία $(x,0)$ έχομε

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2} = x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Άρα υποψήφια τιμή για το α είναι η $\alpha = 0$. Τώρα πρέπει να δείξομε ότι η διαφορά

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^3 - \text{ημ}^3 y}{x^2 + y^2}\right|$$

μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλομε. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$|\text{ημ}\, y| \leq |y|, \quad \forall y \in [-1,1],$$

έχομε

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^3 - \text{ημ}^3 y}{x^2 + y^2}\right| &\leq \frac{|x|^3 + |\text{ημ}^3 y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{|x|\, x^2 + |y|\, y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2\sqrt{x^2 + y^2} + y^2\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

για κάθε (x,y) που ικανοποιεί

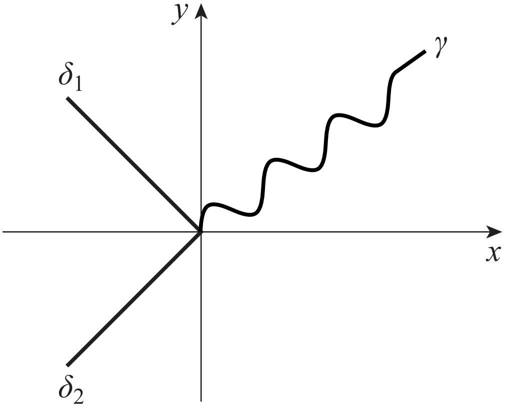
$$\|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \eta = \varepsilon.$$

$\blacksquare$

Από τα παραπάνω παραδείγματα διαπιστώνομε ότι δεν είναι πάντα εύκολο να αποδείξομε την συνέχεια μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο ή ισοδύναμα να υπολογίσομε το όριό της σ' ένα σημείο. Ας κοιτάξομε τα πράγματα λίγο πιο γεωμετρικά για να καταλήξουμε σε μια τεχνική που μας επιτρέπει:

- Να *μαντεύουμε* με σχετική ευκολία το όριο μιας συνάρτησης, και
- να δείχνουμε ότι μια συνάρτηση *δεν* έχει όριο σ' ενα σημείο.

Όπως βλέπουμε στο σχήμα που ακολουθεί, στις δύο διαστάσεις έχομε πολλούς τρόπους για να πλησιάσουμε το σημείο (x_0, y_0). Μπορούμε να το φτάσομε διαλέγοντας ως δρόμο τις ευθείες δ_1, δ_2 ή την καμπύλη γ, ή οτιδήποτε άλλο μας βολεύει.



Ευθείες και καμπύλες που συγκλίνουν στο 0.

Προφανώς, αν η $f(x, y)$ έχει όριο στο (x_0, y_0), τότε το όριο αυτό θα είναι ανεξάρτητο του δρόμου που θα ακολουθήσομε για να φτάσομε στο (x_0, y_0). Έτσι λοιπόν

- Για να μαντέψομε το όριο της $f(x, y)$ στο (x_0, y_0), κινούμεθα συνήθως πάνω σε μια *ευθεία* που περνά από το (x_0, y_0). Π.χ. έστω

$$f(x,y) = \frac{\text{ημ}^3(x+y)}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Θέλουμε να βρούμε το όριο της στο $(0, 0)$.

Κινούμεθα πάνω στην ευθεία $y = \lambda x$ για να φτάσομε στο $(0,0)$. Επί της ευθείας έχομε:

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x,\lambda x) &= \frac{\text{ημ}^3 (1+\lambda) x}{x^2 + \lambda x^2} \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{(1+\lambda)^3 x^3}{(1+\lambda) x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

και συνεπώς το *πιθανό* όριο της $f(x,y)$ στο $(0,0)$ είναι το 0. Για να δείξομε ότι το όριο της $f(x,y)$ στο $(0,0)$ είναι πράγματι το 0, πρέπει να χρησιμοποιήσομε τον ορισμό με τα ε και δ, (άσκηση).

- Ας δούμε τώρα ότι η ίδια τεχνική μας επιτρέπει να δείξομε ότι μια f *δεν έχει όριο* σ' ένα σημείο. Π.χ. έστω

  $$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

  Θέλουμε να δούμε αν η f έχει όριο στο $(0,0)$.

  Αν κινηθούμε πάνω στην ευθεία $y = \lambda x$ για να φτάσομε στο $(0,0)$, έχομε

  $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{(1+\lambda) x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\lambda}{(1+\lambda)} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)}. \end{aligned}$$

  Άρα για κάθε τιμή του λ βρίσκομε και διαφορετικό όριο. Άρα η f δεν έχει όριο στο $(0,0)$.

Παράδειγμα 2.18 Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y^4} e^{-x^2/y^4}, \quad y \neq 0,$$

δεν έχει όριο στο $(0,0)$.

Λύση Αν κινηθούμε επί των ευθειών $y = \lambda x$, έχομε

$$f(x, \lambda x) = \frac{x^2}{(\lambda x)^4} e^{-x^2/(\lambda x)^4} = \frac{1}{\lambda^4 x^2} e^{-1/\lambda^4 x^2}.$$

Θέτοντας

$$w = \frac{1}{\lambda^4 x^2},$$

έχομε

$$\lim_{x \to 0} f(x, \lambda x) = \lim_{w \to \infty} w e^{-w} = 0.$$

Άρα πάνω σ' όλες τις ευθείες $y = \lambda x$, $\lambda \neq 0$, το όριο της f είναι το 0. Όμως, αν κινηθούμε επί της καμπύλης $y^2 = x$, τότε

$$f\left(y^2, y\right) = \frac{\left(y^2\right)^2}{y^4} e^{-\left(y^2\right)^2/y^4} = \frac{1}{e}, \quad \forall y \neq 0,$$

άρα

$$\lim_{y \to 0} f\left(y^2, y\right) = \frac{1}{e},$$

και συνεπώς η f δεν έχει όριο στο 0. ■

Παράδειγμα 2.19 Να εξεταστεί η οριακή συμπεριφορά της

$$f(x, y) = \frac{4xy^2}{\left(x + y^2\right)^2}, \quad x + y^2 \neq 0,$$

στο σημείο $(0, 0)$.

Λύση Θα δείξομε ότι η f δεν έχει όριο στο $(0, 0)$ διαλέγοντας να κινηθούμε σε δύο καμπύλες που περνούν από το $(0, 0)$. Διαλέγομε πρώτα την διαγώνιο $x = y$ και έχομε

$$\begin{aligned} f(x, x) &= \frac{4x^3}{\left(x + x^2\right)^2} = \frac{4x^3}{x^2 (1 + x)^2} \\ &= \frac{4x}{(1 + x)^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0. \end{aligned}$$

Κατόπιν θεωρούμε την καμπύλη $x = y^2$ και έχομε

$$f\left(y^2, y\right) = \frac{4y^2y^2}{\left(y^2+y^2\right)^2} = \frac{4y^4}{4y^4} = 1$$

για κάθε y άρα και για $y = 0$.

Άρα οι δύο καμπύλες δίνουν διαφορετικά όρια στο $(0,0)$ και συνεπώς η f δεν έχει όριο. ■

2.2.1 Ασκήσεις

Άσκηση 2.20 Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{αν} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ \\ 0, & \text{αν} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Άσκηση 2.21 Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,\text{ημ}\left(x^2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)}, & \text{αν} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ \\ 0, & \text{αν} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Άσκηση 2.22 Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & \text{αν} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ \\ 0, & \text{αν} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Είναι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$;

Άσκηση 2.23 Έστω

$$f(x,y) = \frac{x^4 - 2y^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad \text{αν} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

Δείξτε ότι

1. η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

2. Αν
$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_* : |y| < x^2\right\},$$
τότε
$$\lim_{B \ni (x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 1.$$

Άσκηση 2.24 Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x \,\text{ημ}\, y}{x^2+y^2}, & \text{αν} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{αν} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Είναι η f συνεχής στο $(0,0)$;

Άσκηση 2.25 Μπορεί η

$$f(x,y) = \frac{1 - \text{συν}\sqrt{|xy|}}{\sqrt{|y|}}, \quad y \neq 0,$$

να οριστεί επί του άξονα των x έτσι ώστε να είναι συνεχής σ' όλο τον $\mathbb{R}^2$;

2.2.2 Η συνέχεια με ακολουθίες

Όπως και στην διάσταση 1, ο ορισμός των ορίων και της συνέχειας έχει τον ισοδύναμο του με τις ακολουθίες.

Ορισμός 2.26 Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ και

$$A - \{x_0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

1. Η f έχει όριο το α καθώς το x τείνει στο x_0, αν για κάθε ακολουθία $A \ni x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, τότε $f(x_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

2. Η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, αν για κάθε ακολουθία $A \ni x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, τότε $f(x_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$. Γράφομε

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = f(x_0).$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσομε ότι ο ως άνω ακουληθιακός ορισμός του ορίου και της συνέχειας είναι ισοδύναμος με τον ορισμό με τα ε και τα η που ήδη ξέρομε.

Παράδειγμα 2.27 Έστω

$$f(x,y,z) = \frac{\text{εφ}^2\, x + \text{εφ}^2\, y + \text{εφ}^2\, z}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

Πώς πρέπει να οριστεί η f στο $(0,0,0)$ ώστε να είναι συνεχής στην κλειστή μπάλλα $\overline{B(0,1)}$;

Λύση Για να έχομε συνέχεια στο $(0,0,0)$, πρέπει να δώσομε στην f στο $(0,0,0)$ την τιμή που ικανοποιεί

$$f(0,0,0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k, z_k),$$

για κάθε ακολουθία (x_k, y_k, z_k) που τείνει στο $(0,0,0)$.

Αν λοιπόν η ακολουθία (x_k, y_k, z_k) τείνει στο $(0,0,0)$, τότε και οι συνιστώσες της τείνουν στο 0:

$$x_k \to 0,\ y_k \to 0,\ \text{και}\ z_k \to 0,\ \ \text{καθώς}\ \ k \to \infty.$$

Άρα

$$\frac{\text{εφ}\, x_k}{x_k} \to 1, \quad \frac{\text{εφ}\, y_k}{y_k} \to 1, \quad \text{και} \quad \frac{\text{εφ}\, z_k}{z_k} \to 1. \tag{2.7}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} f\left(x_k, y_k, z_k\right) &= \frac{\text{εφ}^2\, x_k + \text{εφ}^2\, y_k + \text{εφ}^2\, z_k}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \\ &= \frac{\frac{\text{εφ}^2\, x_k}{x_k^2} x_k^2 + \frac{\text{εφ}^2\, y_k}{y_k^2} y_k^2 + \frac{\text{εφ}^2\, z_k}{z_k^2} z_k^2}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \longrightarrow 1. \end{aligned}$$

Άρα το πιθανό όριο της f στο $(0,0,0)$ είναι το 1.

Γράφομε,

$$\begin{aligned} f\left(x_k, y_k, z_k\right) - 1 &= \frac{\text{εφ}^2\, x_k + \text{εφ}^2\, y_k + \text{εφ}^2\, z_k}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} - 1 \\ &= \frac{\frac{\text{εφ}^2\, x_k}{x_k^2} x_k^2 + \frac{\text{εφ}^2\, y_k}{y_k^2} y_k^2 + \frac{\text{εφ}^2\, z_k}{z_k^2} z_k^2}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} - 1 \\ &= \frac{\left(\frac{\text{εφ}^2\, x_k}{x_k^2} - 1\right) x_k^2 + \left(\frac{\text{εφ}^2\, y_k}{y_k^2} - 1\right) y_k^2 + \left(\frac{\text{εφ}^2\, z_k}{z_k^2} -\right) z_k^2}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}. \end{aligned}$$

Από την (2.7), για κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε δείκτη $N \in \mathbb{N}$, τ.ω. για $k \geq N$,

$$\left|\frac{\text{εφ}^2\, x_k}{x_k^2} - 1\right| \leq \varepsilon, \quad \left|\frac{\text{εφ}^2\, y_k}{y_k^2} - 1\right| \leq \varepsilon, \ \text{και} \ \left|\frac{\text{εφ}^2\, z_k}{z_k^2} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

Άρα για $k \geq N$,

$$\left|f\left(x_k, y_k, z_k\right) - 1\right| \leq \varepsilon \frac{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} = \varepsilon,$$

δηλαδή,

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_k, y_k, z_k\right) = 1,$$

για κάθε ακολουθία (x_k, y_k, z_k) που τείνει στο $(0,0,0)$. ■

Όπως η κατάλληλη επιλογή δρόμων στα προηγούμενα παραδείγματα, έτσι και η κατάλληλη επιλογή ακολουθιών μας επιτρέπει ή να μαντέψομε το όριο μιας συνάρτησης ή να δείξομε ότι δεν είναι συνεχής. Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι τυπικό του είδους.

Παράδειγμα 2.28 Δείξτε ότι η

$$f\left(x,y\right) = \text{ημ}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0)\,,$$

δεν έχει όριο στο $(0,0)$.

Λύση Η συνάρτηση του παραδείγματος είναι μια παραλλαγή της γνωστής συνάρτησης

$$g\left(x\right) = \text{ημ}\,\frac{1}{x}, \quad x \neq 0,$$

που ως γνωστόν δεν είναι συνεχής στο 0. Πράγματι, θέτοντας

$$x_k = \frac{2}{k\pi}, \ k \in \mathbb{N},$$

έχομε

$$g\left(x_k\right) = \text{ημ}\,\frac{k\pi}{2} = 0, \pm 1.$$

Τώρα, στις δύο διαστάσεις, διαλέγομε την ακολουθία

$$x_k = y_k = \frac{\sqrt{2}}{k\pi}.$$

Τότε

$$\sqrt{x_k^2+y_k^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{k\pi}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{k\pi}\right)^2}$$
$$= \sqrt{2\frac{2}{(k\pi)^2}} = \frac{2}{k\pi}.$$

Συνεπώς

$$f(x_k,y_k) = \text{ημ}\,\frac{1}{\sqrt{x_k^2+y_k^2}} = \text{ημ}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0, \pm 1.$$

Άρα η f πάλλεται συνεχώς μεταξύ του -1, 0 και του $+1$, και συνεπώς δεν έχει όριο στο $(0,0)$. ■

Μερικές φορές, για να διαπιστώσομε αν μια συνάρτηση δεν έχει όριο χρησιμοποιούμε τα *διπλά* ή *επαναλαμβανόμενα* όρια

$$\lim_{x_n\to x_0}\left(\lim_{y_n\to y_0} f(x_n,y_n)\right) \quad \text{και} \quad \lim_{y_n\to y_0}\left(\lim_{x_n\to x_0} f(x_n,y_n)\right).$$

Στο πρώτο όριο, θεωρούμε πρώτα το x_n σταθερό και πέρνομε το όριο ως προς y_n και κατόπιν παίρνομε και το όριο ως προς x_n. Στο δεύτερο οι ρόλοι αντιστρέφονται. Π.χ., αν

$$f(x,y) = xe^{-(x+y)},$$

τότε

$$\lim_{x_n\to 0}\lim_{y_n\to 0} f(x_n,y_n) = \lim_{x_n\to 0}\lim_{y_n\to 0}\left(x_n e^{-(x_n+y_n)}\right)$$
$$= \lim_{x_n\to 0} x_n e^{-x_n}\lim_{y_n\to 0} e^{-y_n}$$
$$= \lim_{x_n\to 0} x_n e^{-x_n} = 0.$$

Αν τώρα τα διπλά όρια της $f(x,y)$ στο (x_0,y_0) δεν είναι ίσα, τότε προφανώς η f δεν έχει όριο στο (x_0,y_0).

Παράδειγμα 2.29 Αν

$$f\left(x,y\right)=y\,\text{ημ}\,\frac{1}{x},\qquad x\neq 0,$$

δείξτε ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)$ δεν υπάρχει.

Λύση Για τα διπλά όρια έχομε:

$$\lim_{x_n\to 0}\lim_{y_n\to 0} f\left(x_n,y_n\right)=\lim_{x_n\to 0}\left[\lim_{y_n\to 0}\left(y_n\,\text{ημ}\,\frac{1}{x_n}\right)\right]=0,$$

ενώ

$$\lim_{y_n\to 0}\lim_{x_n\to 0} f\left(x_n,y_n\right)=\lim_{y_n\to 0}\left[y_n\lim_{x_n\to 0}\left(\text{ημ}\,\frac{1}{x_n}\right)\right]$$

δεν υπάρχει, αφού το

$$\lim_{x_n\to 0}\text{ημ}\,\frac{1}{x_n}$$

δεν υπάρχει. ■

2.2.3 Συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων

Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$. Μια *διανυσματική* συνάρτηση f επί του A είναι μια συνάρτηση

$$\mathbb{R}^n\supset A\xrightarrow{f}\mathbb{R}^k.$$

Παραδείγματος χάριν η

$$f\left(x,y,z\right)=\left(x+z,\text{συν}\,xyz\right),$$

είναι μια συνάρτηση από τον $\mathbb{R}^3$ στον $\mathbb{R}^2$ με *συνιστώσες συναρτήσεις* τις πραγματικές συναρτήσεις

$$f_1\left(x,y,z\right)=x+z\quad\text{και}\quad f_2\left(x,y,z\right)=\text{συν}\,xyz.$$