

Δημήτριος Αραμπέλος

Βαρουτημετρία

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό αποτελεί συνέχιση της προσπάθειας μετά από τα “Στοιχεία Βαρυτημετρίας” (1985), να παρουσιαστεί μια κατά το δυνατόν ολοκληρωμένη εικόνα του αντικειμένου, τόσο όσον αφορά τα όργανα και τη διαδικασία των μετρήσεων της βαρύτητας, όσο και τις αναγωγές, την αξιολόγηση και τη χρησιμοποίηση των μετρήσεων σε γεωδαιτικές, γεωφυσικές, γεωδυναμικές και άλλες εφαρμογές, αποφεύγοντας γενικά τις εξαντλητικές λεπτομέρειες.

Απευθύνεται στους φοιτητές των προπτυχιακών Τμημάτων των Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών των ΑΕΙ, στους μεταπτυχιακούς φοιτητές οι οποίοι ειδικεύονται στις Γεωεπιστήμες, καθώς επίσης σε όλους τους φοιτητές και πτυχιούχους Πολυτεχνικών Σχολών και Σχολών Θετικών Επιστημών οι οποίοι ενδιαφέρονται για το πεδίο βαρύτητας της γης.

Η μονογραφία αυτή είναι βασισμένη σε πανεπιστημιακές παραδόσεις του δασκάλου μου στο Πανεπιστήμιο του Αννοβέρου Καθηγητή W. Torge, στις παραδόσεις στους φοιτητές του Τμήματος Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, στα πλαίσια του μαθήματος “Βαρυτημετρία” και σε ερευνητική εμπειρία πλέον των είκοσι πέντε ετών ενασχόλησης με αντικείμενα σχετικά με τη βαρύτητα και το γεωειδές, όπως αυτή τεκμηριώνεται με περισσότερες από ενενήντα σχετικές δημοσιεύσεις σε διεθνή περιοδικά και πρακτικά διεθνών συνεδρίων.

Στα πλαίσια της προσπάθειας να αντανακλάται η σύγχρονη πραγματικότητα, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην περιγραφή των πλέον σύγχρονων οργάνων και μεθόδων που χρησιμοποιούνται για τη βελτίωση της γνώσης του πεδίου βαρύτητας. Πολλά από τα παραδείγματα τα οποία αναφέρονται στο πεδίο βαρύτητας στον Ελλαδικό ή τον ευρύτερο χώρο αποτελούν αδημοσίευτο υλικό.

Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω θερμά την κυρία I. Καρρίνη για τη συμβολή της στη γραμματική και συντακτική αρτιότητα του κειμένου και τον κύριο B. Ανδριτσάνο που μου δίδαξε το L^AT_EX.

Το βιβλίο αφιερώνεται στη μνήμη του δασκάλου μου Καθηγητή *Hans-Georg Wenzel* (1945-1999) που έφυγε τόσο διακριτικά από κοντά μας, αφήνοντας ένα δυσαναπλήρωτο κενό στις Γεωεπιστήμες.

Συντομογραφίες

- BGI = Bulletin d'Information, Bureau Gravimétrique International, Toulouse.
- Boll. Geod. Sc. Aff. = Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, Istituto Geografico Militare, Firenze.
- Boll. Geof. Teor. Appl. = Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata, Osservatorio Geofisico Sperimentale, Trieste.
- Bull. Géod. = Bulletin Géodésique, Bureau Central de l'Association Internationale de Géodésie, Paris.
- DGK = Veröffentlichungen der Deutschen Geodätischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München und Frankfurt a. M.
- EOS = Transactions, American Geophysical Union, Washington, D.C.
- Geophys. J. Int. = Geophysical Journal International (formerly Geophysical Journal), Published for the Royal Astronomical Society, the Deutsche Geophysikalische Gesellschaft and the European Geophysical Society by Blackwell Scientific Publications.
- Geophys. J. R. Astr. Soc. = Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, London.
- Geophys. Prosp. = Geophysical Prospecting, European Association of Exploration Geophysicists, The Hague.
- J. Geophys. = Journal of Geophysics (Zeitschrift für Geophysik), Springer, Berlin-Heidelberg-New York.
- J. Geophys. Res. = Journal of Geophysical Research, American Geophysical Union, Washington, D.C.
- Marées Terrestres = Bulletin d'Information Marées Terrestres, Observatoire Royal de Belgique, Bruxelles.
- OSU Rep. = Reports of the Department of Geodetic Science (formerly Reports of the Institute of Geodesy, Photogrammetry and Cartography), The Ohio State University, Columbus, Ohio.

Phil. Trans. Roy. Soc. = Philosophical Transactions of the Royal Society, London.

Phys. Chem. Earth = Physics and Chemistry of the Earth, Pergamon - Elsevier Science Ltd.

Rev. Geoph. = Reviews of Geophysics (formerly Reviews of Geophysics and Space Physics), American Geophysical Union, Washington, D.C.

Wiss. Arb. Univ. Hannover = Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, (formerly Wiss. Arb. der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie, Technische Universität Hannover).

ZfV = Zeitschrift für Vermessungswesen, K. Wittwer, Stuttgart.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Αντικείμενο της βαρυτημετρίας	1
1.2	Ιστορική αναδρομή	2
2	Το πεδίο της γήινης βαρύτητας	6
2.1	Συστήματα συντεταγμένων	6
2.1.1	Το γεωκεντρικό σύστημα	6
2.1.2	Το τοπικό σύστημα αναφοράς του πεδίου βαρύτητας	7
2.1.3	Ελλειψοειδή συστήματα αναφοράς	8
2.1.4	Γεωδαιτικές συντεταγμένες	11
2.2	Επιτάχυνση και δυναμικό της βαρύτητας	12
2.2.1	Ιδιότητες του ελκτικού δυναμικού	16
2.2.2	Φυγοκεντρικό δυναμικό	19
2.2.3	Γεωδυναμικό	20
2.2.4	Ανάπτυγμα του ελκτικού δυναμικού σε σειρά	21
	Βιβλιογραφία	26
3	Μετρήσεις - Όργανα μετρήσεων	27
3.1	Απόλυτες και σχετικές μετρήσεις	27
3.2	Απόλυτες μετρήσεις με εκκρεμές	27
3.3	Το πείραμα της ελεύθερης πτώσης	30
3.4	Το πείραμα της κατακόρυφης προς τα άνω ρίψης και πτώσης	33
3.5	Σχετικές μετρήσεις με εκκρεμές	34
3.6	Μετρήσεις με βαρυτήμετρα	35
3.6.1	Αρχή λειτουργίας	35
3.6.2	Αρχική βαθμονόμηση	38
3.7	Διορθώσεις των μετρήσεων της βαρύτητας	42
3.7.1	Περιοδική βαθμονόμηση	42
3.7.2	Ολίσθηση	44
3.8	Σύγχρονες κατασκευές	45
3.8.1	Το πυκνωτικό σύστημα αναγνώσεων	46
3.8.2	Το ηλεκτρονικό σύστημα ανατροφοδότησης	47
3.8.3	Το βαρυτήμετρο υπεραγωγιμότητας	50
3.9	Μετρήσεις στη θάλασσα και τον αέρα	53

3.9.1	Επίδραση της δύναμης Coriolis - Διόρθωση Eötvös	54
	Βιβλιογραφία	57
4	Βαρυτημετρικά δίκτυα	59
4.1	Εγκατάσταση	59
4.2	Μαθηματικά μοντέλα	59
4.3	Συνόρθωση	60
4.3.1	Απαλοιφή παραμέτρων	62
4.3.2	Αριθμητικό παράδειγμα	64
4.3.3	Ταυτόχρονη συνόρθωση μετρήσεων από διαφορετικά όργανα	66
4.4	Συστήματα αναφοράς της βαρύτητας - Δίκτυα αναφοράς	68
	Βιβλιογραφία	69
5	Μέτρηση των δευτέρων παραγώγων του δυναμικού της βαρύτητας	70
5.1	Η σημασία των παραγώγων δευτέρας τάξης του δυναμικού της βαρύτητας	70
5.2	Ο τανυστής των βαθμίδων της βαρύτητας	71
5.3	Βαρυτοβαθμίδα - Κανονική βαρυτοβαθμίδα	72
5.4	Μετρήσεις των παραγώγων δευτέρας τάξης του δυναμικού της βαρύτητας	72
5.4.1	Στατικές μετρήσεις - Ο ζυγός στρέψης	74
5.4.2	Μετρήσεις των παραγώγων δευτέρας τάξης του δυναμικού από κινητή βάση	76
5.5	Υπολογισμός των δευτέρων παραγώγων από μετρήσεις βαρύτητας	80
	Βιβλιογραφία	82
6	Διαχρονικές μεταβολές της βαρύτητας	83
6.1	Μη περιοδικές μεταβολές της βαρύτητας	83
6.2	Επιτάχυνση και δυναμικό των παλιρροιών	83
6.3	Παλίρροιες του στερεού φλοιού της γης	87
6.4	Μέτρηση των παλιρροιών	89
6.5	Ανάλυση των παλιρροϊκών μετρήσεων	90
6.6	Διόρθωση των γεωδαιτικών μετρήσεων λόγω των παλιρροιών	94
	Βιβλιογραφία	97
7	Το γεωδαιτικό ενδιαφέρον των ανωμαλιών της βαρύτητας	99
7.1	Μοντέλα βαρύτητας της γης	99
7.2	Το κανονικό πεδίο βαρύτητας του χωροσταθμικού ελλειψοειδούς	100
7.3	Γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς	106
7.4	Δυναμικό της βαρύτητας και γεωμετρία	108
7.4.1	Το γεωδαιτικό πρόβλημα των συνοριακών τιμών	108
7.4.2	Γραμμικοποίηση του γεωδαιτικού προβλήματος των συνοριακών τιμών	111
7.4.3	Επίλυση του γεωδαιτικού προβλήματος των συνοριακών τιμών για το γεωειδές	112
	Βιβλιογραφία	117

8	Αναγωγές της βαρύτητας και ισοστασία	119
8.1	Αναγωγές της βαρύτητας	119
8.1.1	Οι ανωμαλίες ελεύθερου αέρα	119
8.1.2	Εξάρτηση των ανωμαλιών ελεύθερου αέρα από το υψόμετρο	120
8.1.3	Μέσες τιμές της ανωμαλίας ελεύθερου αέρα	121
8.2	Οι ανωμαλίες Bouguer	122
8.2.1	Η εφαρμογή της μεθόδου FFT στον υπολογισμό της τοπογραφικής αναγωγής	130
8.3	Αναγωγή σε σχέση με μια τοπογραφική επιφάνεια αναφοράς	132
8.4	Οι ανωμαλίες Faye	133
8.5	Απεικόνιση του πεδίου ανωμαλιών της βαρύτητας	133
8.6	Ψηφιακά μοντέλα τοπογραφίας	134
8.7	Ισοστασία - Ισοστατικά μοντέλα	135
8.8	Ισοστατικές ανωμαλίες	138
8.9	Εκτίμηση της πυκνότητας από μετρήσεις βαρύτητας	139
	Βιβλιογραφία	143
9	Η στατιστική περιγραφή του πεδίου βαρύτητας	145
9.1	Οι συναρτήσεις συμμεταβλητότητας	145
9.2	Πρόγνωση στο πεδίο βαρύτητας - Σημειακή προσαρμογή	147
9.3	Οι συντελεστές μεταβλητότητας	153
9.3.1	Μοντέλα συντελεστών μεταβλητότητας	154
9.4	Μοντέλα σφαιρικών αρμονικών του γεωδυναμικού	155
9.5	Η βαρύτητα από άλλες πηγές μετρήσεων	158
9.5.1	Πρόγνωση των ανωμαλιών βαρύτητας από αλτιμετρικά δεδομένα	159
9.5.2	Πρόγνωση των ανωμαλιών της βαρύτητας από αλτιμετρικές τιμές απόκλισης της κατακορύφου	166
9.5.3	Πρόγνωση των ανωμαλιών της βαρύτητας από δορυφορική και από αέρος βαθμιδομετρία	168
	Βιβλιογραφία	170
10	Το ενδιαφέρον των ανωμαλιών της βαρύτητας στη διασκόπηση	176
10.1	Ερμηνεία στο χώρο των αποστάσεων	177
10.2	Ερμηνεία στο χώρο των συχνοτήτων	181
10.3	Συνδυασμός των μεθόδων	185
10.3.1	Η βαρυτημετρική απόκριση	186
10.3.2	Η βέλτιστη προσέγγιση	188
10.3.3	Οι συναρτήσεις συμμεταβλητότητας	189
10.3.4	Μοντέλα με πολλαπλά συσχετισμένα στρώματα	190
10.3.5	Αναγωγή του πεδίου βαρύτητας σε ορισμένο ύψος - τοπικό πεδίο	192
	Βιβλιογραφία	193

Περιεχόμενα	9
11 Βαρυτημετρικά δίκτυα υψηλής ακρίβειας	194
11.1 Σχεδιασμός	194
11.2 Μαθηματικά μοντέλα	195
11.3 Διαδοχική βελτιστοποίηση	197
11.4 Όργανα μετρήσεων	198
Βιβλιογραφία	200
12 Συμβολή των βαρυτημετρικών μετρήσεων στον προσδιορισμό των γεωμετρικών μεταβολών του φλοιού της γης	201
Βιβλιογραφία	206
Ευρετήριο	207

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο της βαρυτημετρίας

Η βαρυτημετρία ως ανεξάρτητος επιστημονικός κλάδος άρχισε να αναπτύσσεται στα τέλη του 19ου αιώνα αλλά οι ρίζες της ανάγονται στους σκαπανείς της κλασικής μηχανικής του 16ου και 18ου αιώνα, Galileo Galilei (1564-1642) και Sir Isaac Newton (1642-1727). Επιφανείς ερευνητές του 18ου και 19ου αιώνα, όπως οι A.C. Clairaut, G.G. Stokes, H. Bruns, F.R. Helmert, ασχολήθηκαν με θεμελιώδη προβλήματα της βαρυτημετρίας και ιδιαίτερα με την εφαρμογή της θεωρίας του δυναμικού σε προβλήματα σχετικά με το σχήμα της γης και την κατανομή της μάζας στο εσωτερικό της. Ο όρος *βαρυτημετρία* αποτελεί την ελληνική απόδοση του αγγλικού *gravimetry* (από το λατινικό *gravis* = βάρος) και το ρήμα *μετρῶ*, ο οποίος καθιερώθηκε ως επιστημονικός όρος του γνωστικού αντικειμένου τον 20ο αιώνα.

Το αντικείμενο της βαρυτημετρίας, όπως έχει διαμορφωθεί με την εξέλιξη της γνωστικής περιοχής, θα μπορούσε να περιγραφεί ως ο ορισμός του πεδίου βαρύτητας της γης και άλλων ουρανίων σωμάτων, συναρτήσει της θέσης και του χρόνου, με μετρήσεις της βαρύτητας και των βαθμίδων της βαρύτητας στην επιφάνεια ή στο χώρο, έξω από την επιφάνεια των σωμάτων αυτών.

Από την άποψη αυτή, ο όρος *βαρυτημετρία* δεν είναι απόλυτα ακριβής και δεν αντανακλά τα θεωρητικά και πρακτικά προβλήματα τα σχετικά με το πεδίο βαρύτητας, τα οποία - εκτός από την ανάπτυξη των οργάνων και τη μεθοδολογία των μετρήσεων της βαρύτητας - αντιμετωπίζει ο επιστημονικός αυτός κλάδος.

Μεταξύ άλλων προβλημάτων, τα οποία αντιμετωπίζει η σύγχρονη βαρυτημετρία, είναι η μελέτη του σχήματος και των διαστάσεων της γης. Οι μετρήσεις της βαρύτητας είναι η κυριώτερη πηγή γνώσης σχετικά με το (εξωτερικό) γήινο πεδίο βαρύτητας, το οποίο είναι το σύστημα αναφοράς για το μεγαλύτερο μέρος των μετρητικών μεγεθών που χρησιμοποιούνται στη γεωδαισία. Για την αναγωγή των μεγεθών αυτών σε συστήματα που ορίζονται με γεωμετρικό τρόπο, θα πρέπει να είναι γνωστό το πεδίο της γήινης βαρύτητας. Αν είναι γνωστή η κατανομή της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης, τότε σε συνδυασμό και με άλλες γεωδαι-

τικές μετρήσεις, μπορεί να οριστεί η μορφή της επιφάνειας αυτής. Η επιφάνεια αναφοράς για τη μέτρηση των υψών -το γεωειδές- είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια του πεδίου βαρύτητας της γης.

Η δημιουργία μοντέλων βαρύτητας της γης και η ερμηνεία των αποκλίσεων του πραγματικού πεδίου βαρύτητας από τα θεωρητικά μοντέλα είναι επίσης αντικείμενο της σύγχρονης βαρυτημετρίας. Επειδή οι αποκλίσεις αυτές έχουν σχέση με την κατανομή των μαζών στο εσωτερικό της γης, τα αποτελέσματα της μελέτης του πεδίου βαρύτητας έχουν σχέση με τη δομή και σύσταση τόσο ολόκληρης της γης (γεωφυσική), όσο και της ανώτερης λιθόσφαιρας. Με την τελευταία περίπτωση συνδέεται η αναζήτηση πηγών ενέργειας ή ορυκτών πόρων, που αποτελεί αντικείμενο της εφαρμοσμένης γεωφυσικής (γεωφυσική διασκόπηση).

Στη λιθόσφαιρα παρατηρείται τεκτονική δράση, η οποία συνεπάγεται μεταβολές στο σχήμα της και στο πεδίο βαρύτητας της γης και τη γένεση καταστρεπτικών φαινομένων (ισχυροί σεισμοί). Η διαχρονική παρακολούθηση του πεδίου βαρύτητας και η καταγραφή των μεταβολών της βαρύτητας, οι οποίες οφείλονται σε τεκτονικά αίτια, αποτελεί πηγή πληροφορίας σχετικά με την εξέλιξη τέτοιων φαινομένων. Ακόμη, μεταβολές τεκτονικού χαρακτήρα φανερώνουν προβλήματα ισορροπίας της λιθόσφαιρας τα οποία η βαρυτημετρία προσπαθεί να ερμηνεύσει με τη θεωρία της ισοστασίας.

Μεταβολές όμως στο πεδίο βαρύτητας της γης οφείλονται και σε άλλα αίτια, όπως π.χ. στην επίδραση των μαζών των ουρανίων σωμάτων, η οποία προκαλεί περιοδικές μεταβολές του πεδίου βαρύτητας και παραμόρφωση του σχήματος της λιθόσφαιρας (γήινες παλίρροιες). Η καταγραφή και μελέτη του φαινομένου παρέχει πληροφορίες για τον τρόπο με τον οποίο αντιδρά η λιθόσφαιρα στην παλιρροϊκή φόρτιση, δηλ. πληροφορίες σχετικά με τις ελαστικές ιδιότητες της λιθόσφαιρας, οι οποίες αποτελούν αντικείμενο μελέτης της γεωδυναμικής.

Η γνώση του εξωτερικού πεδίου βαρύτητας της γης συμβάλλει στον ακριβέστερο προσδιορισμό της τροχιάς των τεχνητών δορυφόρων, οι οποίοι είναι μάζες που κινούνται μέσα στο πεδίο βαρύτητας και με τη σειρά τους παρέχουν πλήθος πληροφοριών για τη βελτίωση της γνώσης του πεδίου βαρύτητας, δηλ. υπάρχει μια συνεχής ανάδραση (feedback) ανάμεσα στη βαρυτημετρία και στις σύγχρονες δορυφορικές μεθόδους.

1.2 Ιστορική αναδρομή

Οι πρώτες μετρήσεις της επιτάχυνσης της βαρύτητας αποδίδονται στον Galileo Galilei, ο οποίος παρατηρούσε την τροχιά σωμάτων που εκτελούσαν ελεύθερη πτώση. Ο Sir Isaac Newton θεωρείται ως ο θεμελιωτής της επιστήμης της βαρυτημετρίας με τη διατύπωση του νόμου της παγκόσμιας έλξης, που δημοσιεύθηκε στην εργασία του “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica” (1687). Οι εργασίες των δύο αυτών ερευνητών κατέδειξαν ως εσφαλμένη τη θεωρία του Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.), σύμφωνα με την οποία η ταχύτητα των σωμάτων που εκτελούν ελεύθερη πτώση είναι ανάλογη του βάρους των.

Ο σύγχρονος του Newton, Ch. Huygens (1629-1695) εκτός από τις εργασίες του σχετικά με το σχήμα της γης ασχολήθηκε με τη θεωρία του φυσικού εκ-

χρεμούς η οποία δημοσιεύθηκε στην εργασία του “Horologium oscilatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae” (1673).

Ο A.C. Clairaut (1713-1765) ερμήνευσε τις ασυμφωνίες ανάμεσα στις θεωρίες του Newton και του Huygens και έδειξε στην εργασία του “Théorie de la Figure de la Terre” (1743) ότι η πλάτυνση της γης, δηλ. ένα γεωμετρικό μέγεθος, είναι δυνατό να υπολογισθεί από μετρήσεις της βαρύτητας, δηλ. από ένα φυσικό μέγεθος, αρχή στην οποία στηρίζεται η φυσική γεωδαισία.

Ο C.F. Gauss (1777-1855) πρότεινε (1828) να θεωρείται ως μαθηματικό σχήμα της γης, η ισοδυναμική επιφάνεια η οποία αντιστοιχεί στην επιφάνεια της θάλασσας. Αργότερα, ο J.B. Listing (1873) ονόμασε την επιφάνεια αυτή *γεωειδές*.

Κατά τη διάρκεια του 17ου, 18ου και 19ου αιώνα, επιφανείς ερευνητές, όπως π.χ. οι C. MacLaurin, P.S. Laplace, A.M. Legendre, G. Stokes, G. Green, F.R. Helmert, ασχολήθηκαν με διάφορα θεωρητικά προβλήματα της βαρυτημετρίας.

Τα απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία για τη χρησιμοποίηση των μετρήσεων της βαρύτητας προέκυψαν με τη θεμελίωση της θεωρίας του δυναμικού από τους μαθηματικούς J.L. Lagrange (1736-1813), P.S. Laplace (1749-1827), A.M. Legendre (1752-1833) και S.D. Poisson (1781-1840).

Ιδιαίτερη βαρύτητα έχουν οι μελέτες του G.G. Stokes (1819-1903), ο οποίος απέδειξε ότι το γεωειδές μπορεί να προσδιορισθεί από μετρήσεις βαρύτητας, οι οποίες καλύπτουν την επιφάνεια της γης. Ο ολοκληρωματικός τύπος, τον οποίο πρότεινε για το σκοπό αυτό με την εργασία του “On the variation of gravity on the surface of the earth” (1849), έγινε δυνατό να εφαρμοσθεί ένα ολόκληρο αιώνα αργότερα, όταν η επιφάνεια της γης καλύφθηκε από ικανοποιητικό αριθμό μετρήσεων.

Το δεύτερο ήμισυ του 18ου αιώνα άρχισε η χρησιμοποίηση των μετρήσεων της βαρύτητας στη γεωφυσική με την προσπάθεια προσδιορισμού της μέσης πυκνότητας της γης (της μάζας της γης) και της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης. Οι προσπάθειες αυτές βασίστηκαν σε πειράματα των P. Bouguer, G.B. Airy, H. Cavendish, Ph. von Jolly.

Το 19ο αιώνα οι J.H. Pratt (1809-1871) και G.B. Airy (1801-1892) δημοσίευσαν τις θεωρίες τους σχετικά με την αντιστάθμιση των τοπογραφικών μαζών και την ισορροπία της λιθόσφαιρας (*ισοστασία*). Αργότερα οι θεωρίες αυτές βελτιώθηκαν από τους J.F. Hayford (1909), W. Bowie (1917), W. A. Heiskanen (1924) και F.A. Vening-Meinesz (1931).

Για μεγάλο χρονικό διάστημα (μέχρι τις αρχές του 20ου αιώνα) για τις μετρήσεις της βαρύτητας χρησιμοποιήθηκε το εκκρεμές (μια προσέγγιση του μαθηματικού εκκρεμούς). Ο J. Bohnenberger (1811) περιέγραψε την αρχή του αντιστρεπτού εκκρεμούς. Ο G. Prony (1792) πρότεινε ένα τρόπο υλοποίησής του, ο οποίος όμως δεν χρησιμοποιήθηκε. Ο H. Kater (1818) κατασκεύασε το πρώτο αντιστρεπτό εκκρεμές για μετρήσεις πεδίου. Από τότε έγιναν αρκετές μετατροπές στο αντιστρεπτό εκκρεμές για απόλυτες μετρήσεις της επιτάχυνσης της βαρύτητας.

Το πρώτο όργανο για τη μέτρηση διαφορών της επιτάχυνσης της βαρύτητας (σχετική μέτρηση) ήταν επίσης βασισμένο στην αρχή του εκκρεμούς και κατασκευάστηκε στα τέλη του 19ου αιώνα από τον R. von Sterneck. Η διαφορά της επιτάχυνσης της βαρύτητας ανάμεσα σε δύο σταθμούς προκύπτει από τη διαφορά του χρόνου ταλάντωσης του εκκρεμούς στους σταθμούς αυτούς, με την

προϋπόθεση ότι το μήκος του εκκρεμούς παραμένει σταθερό. Οι διάφοροι τύποι παρόμοιων οργάνων τα οποία κατασκευάστηκαν στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκαν για μετρήσεις σε παγκόσμια κλίμακα.

Με τη μετάβαση από τις απόλυτες σε σχετικές μετρήσεις προέκυψε η ανάγκη της γνώσης μιας τιμής αναφοράς. Ο F.R. Helmert (1843-1917) αναθεώρησε τη θεωρία του αντιστρεπτού εκκρεμούς και οι F. Kühnen και Ph. Furtwängler από το 1898 έως το 1904 έκαναν νέες απόλυτες μετρήσεις στο Potsdam, οι οποίες χρησίμευσαν ως βάση του Potsdam Gravity System, το οποίο καθιερώθηκε το 1909.

Σημαντική συνεισφορά στη βαρυτημετρία αποτέλεσε η κατασκευή από τον R. von Eötvös (1908) του ζυγού στρέψης, ενός οργάνου πεδίου με το οποίο είναι δυνατό να μετρηθούν ορισμένες από τις δεύτερες μερικές παραγώγους του δυναμικού της βαρύτητας.

Οι πρώτες μετρήσεις βαρύτητας στη θάλασσα έγιναν το 1928 από τον F.A. Vening-Meinesz με όργανο βασισμένο στην αρχή του εκκρεμούς δικής του κατασκευής.

Από το 1945 και μετά η βαρυτημετρία γνώρισε σημαντικές τεχνολογικές εξελίξεις με την κατασκευή στατικών οργάνων μεγάλης ακρίβειας και ευρείας κλίμακας μετρήσεων, την κατασκευή οργάνων απόλυτης μέτρησης βασισμένων στην αρχή της ελεύθερης πτώσης και την κατασκευή οργάνων για μετρήσεις στη θάλασσα (στην επιφάνεια ή στον πυθμένα).

Τα όργανα αυτά βοήθησαν στην εγκατάσταση νέων βαρυτημετρικών δικτύων. Το 1971 ιδρύθηκε το *Διεθνές Πρότυπο Δίκτυο Βαρύτητας 1971* (International Gravity Standardization Net 1971- IGSN71) βασισμένο σε απόλυτες μετρήσεις με το όργανο που χρησιμοποιεί την αρχή της ελεύθερης πτώσης και σχετικές μετρήσεις με βαρυτήμετρα LaCoste-Romberg, το οποίο αντικατέστησε το Potsdam Gravity System και από τότε εμπλουτίζεται συνεχώς με νέες απόλυτες και σχετικές μετρήσεις.

Η σύγχρονη εποχή της βαρυτημετρίας χαρακτηρίζεται από τις ραγδαίες εξελίξεις τόσο στην κατασκευή οργάνων (όργανα υπεραγωγιμότητας, αδρανειακά συστήματα, βαθμιδόμετρα), όσο και στην ανάπτυξη συστημάτων και μεθόδων χάρις στις οποίες η γνώση μας σχετικά με το πεδίο βαρύτητας βελτιώνεται συνεχώς από νέες πηγές.

- Η κατασκευή ευαίσθητων οργάνων υπεραγωγιμότητας με πρακτικά μηδενική ολίσθηση αποτέλεσε σημαντική συνεισφορά στη χρησιμοποίηση των διαχρονικών μετρήσεων της βαρύτητας για εφαρμογές της γεωδυναμικής.
- Οι πολυάριθμες δορυφορικές αποστολές της NASA και της ESA (GEOS-3, SEASAT, GEOSAT, ERS-1, ERS-2, TOPEX) εφοδίασαν τους ερευνητές με πλήθος αλτιμετρικών δεδομένων, τα οποία με σύγχρονες στοχαστικές και φασματικές μεθόδους μετατρέπονται σε πληροφορίες σχετικά με το πεδίο βαρύτητας της γης και την τοπογραφία της θάλασσας, καλύπτοντας περιοχές οι οποίες είναι δύσκολο - αν όχι αδύνατο - να καλυφθούν με επίγειες μετρήσεις.
- Συστήματα μέτρησης από αέρα βρίσκονται ήδη σε λειτουργία με σκοπό να

καλύψουν με μετρήσεις της βαρύτητας ή των βαθμίδων της βαρύτητας περιοχές όπως οι πολικές ζώνες, οι οποίες δεν καλύπτονται από δορυφορικές μετρήσεις.

Πολλές από τις από εικοσαετίας και πλέον σχεδιαζόμενες καθαρά βαρυτημετρικές δορυφορικές αποστολές (όπως π.χ. η αποστολή ARISTOTELES -Applications and Research Involving Space Techniques Observing The Earth's field from Low Earth orbiting Satellites) δεν υλοποιήθηκαν μέχρι σήμερα ή τα σχέδια αυτά εγκαταλείφθηκαν, ενώ για το άμεσο μέλλον σχεδιάζονται νέα προγράμματα, όπως π.χ. η γερμανική δορυφορική αποστολή CHAMP (Challenging Mini-Satellite Payload for Geophysical Research and Application), η αμερικανο-γερμανική GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment), και η αποστολή της ESA GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Mission), τα οποία αναμένεται να υλοποιηθούν στις αρχές της νέας χιλιετίας (2004).

Στην εποχή μας, το γεωειδές δεν είναι μόνο η επιφάνεια αναφοράς των υψομέτρων, αλλά η επιφάνεια αναφοράς των μεταβολών που συμβαίνουν στη θάλασσα, στην ξηρά και στους παγετώνες και της αλληλεπίδρασής των, το δε πεδίο βαρύτητας ο καθρέφτης των διεργασιών στο εσωτερικό της γης.

Η εξέλιξη της βαρυτημετρίας συνεχίζεται μέσα από διεθνείς συνεργασίες μεγάλων οργανισμών, των ειδικών ομάδων εργασίας της Διεθνούς Γεωδαιτικής Ένωσης (International Association of Geodesy) αλλά και μικρότερων ερευνητικών ομάδων και μεμονωμένων ερευνητών, με τη χρησιμοποίηση όλων των μεθόδων και τεχνολογικών μέσων τα οποία σε κάθε εποχή τίθενται στη διάθεση της επιστημονικής έρευνας.

Κεφάλαιο 2

Το πεδίο της γήινης βαρύτητας

2.1 Συστήματα συντεταγμένων

2.1.1 Το γεωκεντρικό σύστημα

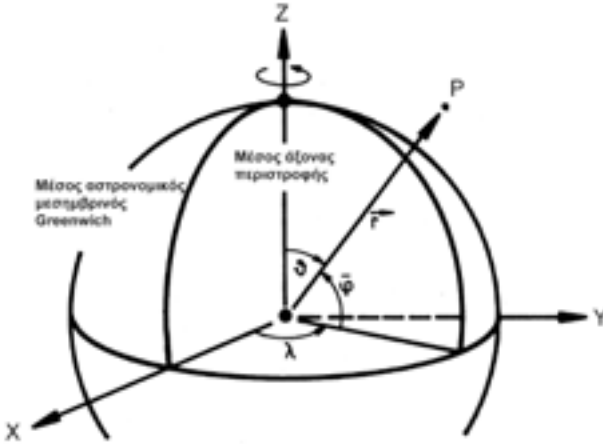
Για την προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας σε σφαιρική κλίμακα χρησιμοποιείται το ελλειψοειδές γεωκεντρικό σύστημα συντεταγμένων. Η γεωμετρία του ορίζεται από ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής με μεγάλο ημιάξονα a και μικρό ημιάξονα b . Η αρχή του συστήματος αυτού είναι το κέντρο μάζας της γης C . Ο άξονας Z συμπίπτει με το μέσο (ανεξάρτητο του χρόνου/time invariant) άξονα περιστροφής της γης, όπως ορίζεται από τη μέση θέση του πόλου για το χρονικό διάστημα 1900.0 - 1906.0 (Conventional International Origin, CIO). Ο άξονας X κατευθύνεται στην τομή του αστρονομικού μεσημβρινού του Greenwich (μηδενικός μεσημβρινός του Διεθνούς Γραφείου Ώρας - Bureau International de l'Heure) με το μέσο ισημερινό επίπεδο και ο άξονας Y συμπληρώνει ένα δεξιόστροφο τρισσορθογώνιο σύστημα.

Το πεδίο βαρύτητας σφαιρικών σωμάτων περιγράφεται απλούστερα με τη χρησιμοποίηση σφαιρικών συντεταγμένων (r, ϑ, λ) (Σχήμα 2.1), όπου r η γεωκεντρική απόσταση, $\vartheta = 90^\circ - \bar{\varphi}$ η σφαιρική απόσταση ($\bar{\varphi}$ το γεωκεντρικό πλάτος) και λ το γεωγραφικό μήκος. Το γεωκεντρικό πλάτος $\bar{\varphi}$ συνδέεται με το (ελλειψοειδές) γεωγραφικό πλάτος φ (Σχήμα 2.1) με τη σχέση

$$\tan \bar{\varphi} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \tan \varphi. \quad (2.1)$$

Για το διάνυσμα θέσης \mathbf{r} του σημείου P ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι μετασχηματισμού

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \lambda \\ \sin \vartheta \sin \lambda \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$



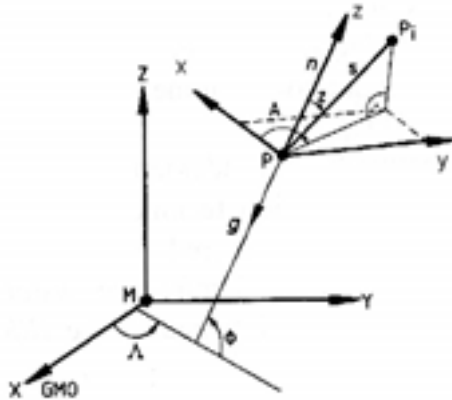
Σχήμα 2.1: Γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς

2.1.2 Το τοπικό σύστημα αναφοράς του πεδίου βαρύτητας

Για την περιγραφή της γεωμετρίας του πεδίου βαρύτητας σε τοπική κλίμακα και για υπολογισμούς σε περιορισμένες περιοχές χρησιμοποιούνται τοπικά συστήματα συντεταγμένων που συνδέονται με το σημείο P του πεδίου βαρύτητας όπου γίνεται ο υπολογισμός, δηλ. έχουν την αρχή τους στο σημείο P (Σχήμα 2.2). Ο προσανατολισμός του συστήματος είναι ο ακόλουθος: ο άξονας z συμπίπτει με τη διεύθυνση της κατακόρυφου και κατευθύνεται στο ναδίρ (δηλ. έχει τη διεύθυνση του διανύσματος \mathbf{g} , ενώ συνήθως στη γεωδαισία ο άξονας z κατευθύνεται στο ζενίθ). Οι άξονες x και y ορίζουν ένα τοπικό οριζόντιο επίπεδο και κατευθύνονται στο βορρά (αστρονομικός μεσημβρινός) και στην ανατολή αντίστοιχα. Τα τοπικά συστήματα συνδέονται με το σφαιρικό σύστημα μέσω του αστρονομικού πλάτους Φ και του αστρονομικού μήκους Λ , ενώ η διεύθυνση του μεσημβρινού ορίζεται με το αστρονομικό αζιμούθιο A του επίγειου στόχου (Σχήμα 2.2). Το διάνυσμα της βαρύτητας εκφράζεται με τη σχέση

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{n} = -g \begin{pmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda \\ \sin \Phi \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

όπου \mathbf{n} το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου.



Σχήμα 2.2: Τοπικό σύστημα αναφοράς του πεδίου βαρύτητας x, y, z και γεωκεντρικό σύστημα X, Y, Z

2.1.3 Ελλειψοειδή συστήματα αναφοράς

Η επιφάνεια της γης είναι δυνατό να προσεγγιστεί από ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής, έτσι ώστε συχνά, αντί για το τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, να χρησιμοποιούνται ελλειψοειδή συστήματα.

Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής παράγεται από την περιστροφή μιας έλλειψης γύρω από το μικρό της ημιάξονα. Επομένως το σχήμα του ελλειψοειδούς περιγράφεται από δύο γεωμετρικές παραμέτρους, το μεγάλο ημιάξονα a και το μικρό ημιάξονα b . Αντί του μικρού ημιάξονα χρησιμοποιείται συνήθως μια από τις ακόλουθες ποσότητες

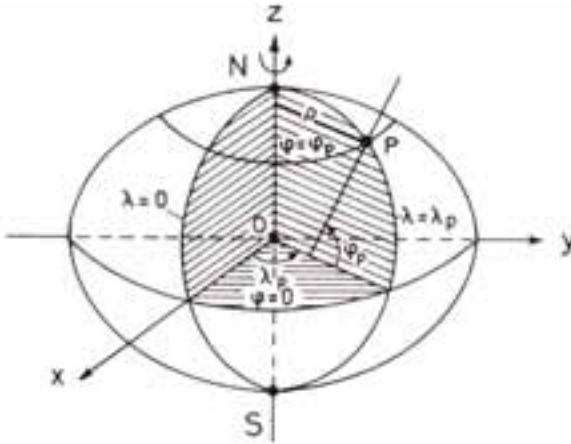
$$f = \frac{a-b}{a}, \quad \varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{\varepsilon}{a}, \quad e' = \frac{\varepsilon}{b}. \quad (2.4)$$

Μεταξύ των ποσοτήτων αυτών ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{b}{a} = 1 - f = \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}}. \quad (2.5)$$

Σε τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (x, y, z) με το κέντρο του ελλειψοειδούς στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων και τον άξονα z να συμπίπτει με το μικρό άξονα του ελλειψοειδούς (Σχήμα 2.3), η εξίσωση της επιφάνειας του είναι

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (2.6)$$



Σχήμα 2.3: Ελλειψοειδείς γεωγραφικές συντεταγμένες

Στο σύστημα των ελλειψοειδών γεωγραφικών συντεταγμένων (ellipsoidal geographic coordinates) το τυχόν σημείο P επάνω στο ελλειψοειδές ορίζεται από το γεωγραφικό πλάτος (geographic latitude) φ , και το γεωγραφικό μήκος (geographic longitude) λ . φ είναι η γωνία επί του μεσημβρινού επιπέδου η οποία σχηματίζεται μεταξύ του ισημερινού επιπέδου (x, y) του ελλειψοειδούς και της καθέτου στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς στο σημείο P . λ είναι η γωνία η οποία σχηματίζεται στο ισημερινό επίπεδο μεταξύ του μεσημβρινού του μηδενός και του μεσημβρινού επιπέδου του σημείου P .

Αν p είναι η απόσταση του σημείου P από τον άξονα περιστροφής Oz (Σχήμα 2.3) με τις σχέσεις

$$x = p \cos \lambda, \quad y = p \sin \lambda$$

εισάγεται ως νέα μεταβλητή η ακτίνα του κύκλου πλάτους

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.7)$$

Με αντικατάσταση της (2.7) στη (2.6) και διαφόριση προκύπτει η κλίση της εφαπτομένης του ελλειψοειδούς στο σημείο P (βλ. Σχήμα 2.4)

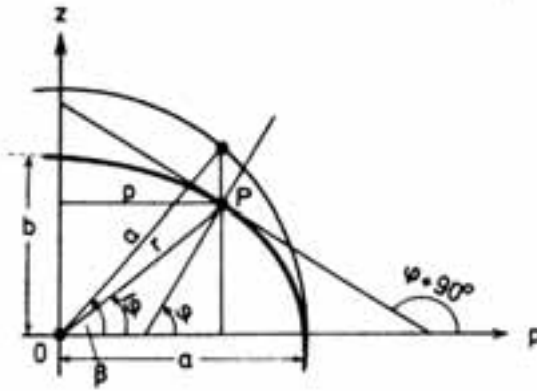
$$\frac{dz}{dp} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{p}{z} = -\cot \varphi. \quad (2.8)$$

Ακόμη από το Σχήμα (2.4) προκύπτουν οι σχέσεις

$$p = r \cos \bar{\varphi}, \quad z = r \sin \bar{\varphi}, \quad r = \sqrt{p^2 + z^2} \quad (2.9)$$

για την εξίσωση της έλλειψης συναρτήσει των $\bar{\varphi}$ και r .

Σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιείται το *ανηγμένο πλάτος* (reduced latitude) β . Το ανηγμένο πλάτος προκύπτει με προβολή της έλλειψης στον ομόκεντρο κύκλο ακτίνας a (Σχήμα 2.4). Από το ίδιο σχήμα προκύπτει



Σχήμα 2.4: Το γεωγραφικό πλάτος φ , το ανηγμένο πλάτος β και το γεωκεντρικό πλάτος $\bar{\varphi}$

$$p = a \cos \beta \quad (2.10)$$

και με αντικατάσταση της (2.10) στην εξίσωση της έλλειψης του Σχήματος (2.4) προκύπτει

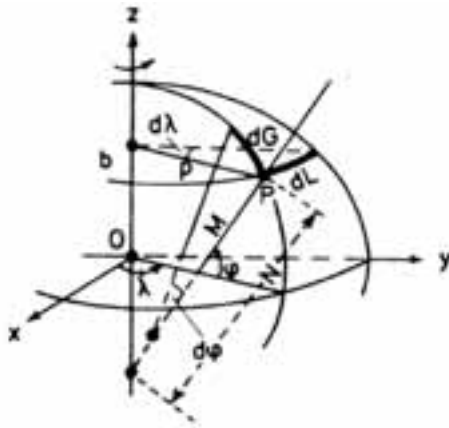
$$z = b \sin \beta. \quad (2.11)$$

Συγκρίνοντας τις (2.9) και (2.10) με την (2.8) προκύπτουν οι σχέσεις μεταξύ του γεωγραφικού πλάτους φ , του γεωκεντρικού πλάτους $\bar{\varphi}$ και του ανηγμένου πλάτους β

$$\tan \bar{\varphi} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \tan \varphi, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} \tan \varphi. \quad (2.12)$$

Ακόμη, η μεσημβρινή ακτίνα καμπυλότητας M και η ακτίνα καμπυλότητας της πρώτης καθέτου N (βλ. Σχήμα 2.5) είναι μεγέθη τα οποία εμπλέκονται στις σχέσεις ανάμεσα στο δυναμικό της βαρύτητας και τη γεωμετρία (βλ. §7.4). Τα μεγέθη αυτά συνδέονται με τις γεωμετρικές παραμέτρους του ελλειψοειδούς με τις ακόλουθες σχέσεις [5]

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}, \quad (2.13)$$



Σχήμα 2.5: Καμπυλότητα του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής

$$N = \frac{p}{\cos \varphi}, \quad (2.14)$$

ή ακόμη (λόγω της αξονικής συμμετρίας)

$$N = \frac{\alpha}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}. \quad (2.15)$$

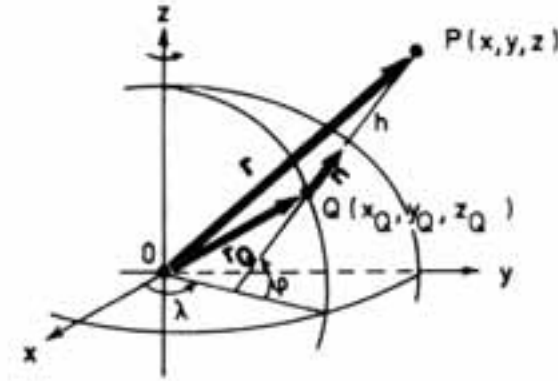
2.1.4 Γεωδαιτικές συντεταγμένες

Για υπολογισμούς στο πεδίο βαρύτητας χρησιμοποιούνται συνήθως οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες στο χώρο (spatial ellipsoidal coordinates), δηλ. το ελλειψοειδές γεωγραφικό πλάτος (ellipsoidal geographical latitude) φ , το ελλειψοειδές γεωγραφικό μήκος (ellipsoidal geographical longitude) λ και το ελλειψοειδές ύψος (ellipsoidal height) h . Οι συντεταγμένες φ , λ , h είναι γνωστές ως γεωδαιτικές συντεταγμένες (geodetic coordinates). Το σημείο P στην επιφάνεια της γης προβάλλεται στο σημείο Q επάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς μέσω της καθέτου στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς (προβολή του Helmert). Το γεωδαιτικό ύψος μετράται κατά μήκος της καθέτου στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς (Σχήμα 2.6).

Για το διάνυσμα θέσης \mathbf{r}_Q του σημείου Q του ελλειψοειδούς ισχύει

$$\mathbf{r}_Q = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ (1 - e^2) \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Για το σημείο P στην επιφάνεια της γης, επειδή $\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + h\mathbf{n}$ και



Σχήμα 2.6: Οι γεωδαιτικές συντεταγμένες φ , λ , h

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix},$$

ισχύει

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N+h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N+h) \cos \varphi \sin \lambda \\ ((1-e^2)N+h) \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Το αντίστροφο πρόβλημα για τις γεωδαιτικές συντεταγμένες λύνεται με επαναληπτική διαδικασία σύμφωνα με τις εξισώσεις οι οποίες ακολουθούν, όπου το σύστημα των εξισώσεων συγκλίνει με ταχύτητα, επειδή $h \ll N$

$$\varphi = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 - e^2 \frac{N}{N+h} \right)^{-1}, \quad (2.18)$$

$$\lambda = \arctan \frac{y}{x}, \quad (2.19)$$

$$h = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi} - N. \quad (2.20)$$

2.2 Επιτάχυνση και δυναμικό της βαρύτητας

Ένα σώμα που περιστρέφεται μαζί με τη γη υπόκειται σε ελκτικές δυνάμεις που οφείλονται στη μάζα της γης και των ουρανίων σωμάτων και στη φυγόκεντρη δύναμη που οφείλεται στην περιστροφή της γης. Ο συνδυασμός των ελκτικών

δυνάμεων και της φυγόκεντρης δύναμης είναι η δύναμη της βαρύτητας. Μονάδες μέτρησης της επιτάχυνσης της βαρύτητας στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI - *Système International d'Unités*) είναι το ms^{-2} . Επειδή η επιτάχυνση της βαρύτητας μπορεί να μετρηθεί με ακρίβεια $10^{-7} \dots 10^{-8} \text{ms}^{-2}$ και επειδή ενδιαφέρον για την ανάλυση δεν έχουν οι ίδιες οι τιμές της επιτάχυνσης της βαρύτητας, αλλά οι αποκλίσεις του πεδίου βαρύτητας της (πραγματικής) γης από το πεδίο βαρύτητας μιας *καινοικιής* γης που γενικά παραμένουν μικρότερες από $2 \times 10^{-3} \text{ms}^{-2}$, χρησιμοποιούνται ακόμη οι μονάδες:

$\text{mGal} = 10^{-5} \text{ms}^{-2}$, $\mu\text{Gal} = 10^{-8} \text{ms}^{-2} = 10 \text{nms}^{-2}$, που είναι υποδιαιρέσεις του Gal (από το όνομα του Galilei) δηλ. $1 \text{Gal} = \text{cms}^{-2}$ (σύστημα c.g.s.).

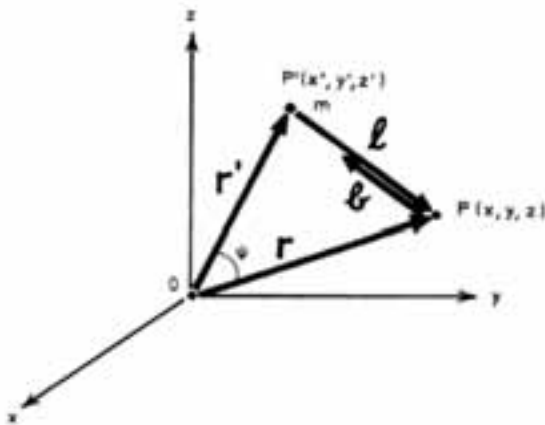
Σύμφωνα με το νόμο του Newton, δύο μάζες m_1 και m_2 έλκονται αμοιβαία με δύναμη

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{l^2} \frac{\mathbf{l}}{l}, \quad (2.21)$$

όπου G η παγκόσμια σταθερά έλξης (gravitational constant) και l η απόσταση μεταξύ των σημειακών μαζών. Η μονάδα μάζας τοποθετημένη στο ελκόμενο σημείο P (Σχήμα 2.7) στο πεδίο των ελκτικών δυνάμεων υπόκειται σε επιτάχυνση

$$\mathbf{b} = -G \frac{m}{l^2} \frac{\mathbf{l}}{l}, \quad (2.22)$$

η οποία οφείλεται στη μάζα m που είναι τοποθετημένη στο έλκον σημείο P'.



Σχήμα 2.7: Η επιτάχυνση των ελκτικών δυνάμεων \mathbf{b}

Το διάνυσμα \mathbf{b} έχει τη διεύθυνση της γραμμής η οποία συνδέει τα σημεία P και P' και φορά προς το P'. Το διάνυσμα \mathbf{l} μπορεί να παρασταθεί από τα διανύσματα \mathbf{r} και \mathbf{r}' στο καρτεσιανό σύστημα (x, y, z) με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

όπου

$$l = |\mathbf{l}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Η τιμή της παγκόσμιας σταθεράς έλξης είναι (βλ. π.χ. [6])
 $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$.

Η συνολική έλξη που ασκεί η γη, που αποτελείται από άπειρα στοιχεία μάζας, στη μονάδα μάζας στο σημείο P προκύπτει με άθροιση των επιμέρους επιταχύνσεων (2.22) διανυσματικά. Οι υπολογισμοί στο πεδίο βαρύτητας απλουστεύονται, αν, αντί του διανυσματικού πεδίου, περάσουμε σε βαθμωτό πεδίο. Αυτό είναι δυνατό γιατί το πεδίο των ελκτικών δυνάμεων είναι ένα συντηρητικό πεδίο, δηλ. το \mathbf{b} μπορεί να παρασταθεί ως η κλίση μιας συνάρτησης δυναμικού V

$$\mathbf{b} = \text{grad } V. \quad (2.24)$$

Το ελκτικό δυναμικό (gravitational potential)

$$V = V(l) = \frac{Gm}{l} \quad (2.25)$$

εισάγεται με τη συνθήκη $V_{l \rightarrow \infty} = 0$ ως μια θετική ποσότητα. Η τιμή του δυναμικού στο σημείο P του πεδίου έλξης είναι ίση με το έργο το οποίο πρέπει να καταναλωθεί ώστε να κινηθεί η μονάδα μάζας από το ∞ ($V = 0$) μέχρι το σημείο P. Το δυναμικό έλξης έχει διαστάσεις έργου ανά μονάδα μάζας και μονάδα $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$. Από τη σημειακή μάζα m επιστρέφουμε στη γη με συνεχή κατανομή στοιχειωδών μαζών

$$dm = \rho dv, \quad (2.26)$$

όπου $\rho = \rho(\mathbf{r}')$ είναι η πυκνότητα και dv ο στοιχειώδης όγκος. Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.24) το δυναμικό της γης δίνεται από τη σχέση

$$V = V(\mathbf{r}) = G \iiint_{\gamma\eta} \frac{dm}{l} = G \iiint_{\gamma\eta} \frac{\rho}{l} dv. \quad (2.27)$$

Για τον υπολογισμό του V πρέπει να είναι γνωστή η συνάρτηση της πυκνότητας $\rho = \rho(\mathbf{r}')$. Στην πραγματικότητα αυτό συμβαίνει μόνο για τμήματα της ανώτερης λιθόσφαιρας. Σε πρώτη προσέγγιση ο υπολογισμός της τιμής του δυναμικού διευκολύνεται, αν η γη θεωρηθεί σφαιρική με κατανομή της πυκνότητας συμμετρική ως προς το κέντρο της. Ένα τέτοιο σώμα είναι δυνατό να θεωρηθεί ότι αποτελείται από άπειρα γεωκεντρικά σφαιρικά ομογενή κελύφη, οπότε το ζητούμενο δυναμικό θα ισούται με το άθροισμα των δυναμικών από τα άπειρα αυτά κελύφη. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων (r, ϑ, λ) (Σχήμα 2.1). Ο συνήθης προσανατολισμός του συστήματος αυτού είναι τέτοιος ώστε ο άξονας $\vartheta = 0$ συμπίπτει με τον άξονα Z , ο άξονας

$\lambda = 0$ συμπίπτει με τον άξονα X , οπότε για το μετασχηματισμό των συντεταγμένων ισχύουν οι σχέσεις (2.2). Τότε ϑ είναι η σφαιρική πολική απόσταση και λ το γεωγραφικό μήκος.

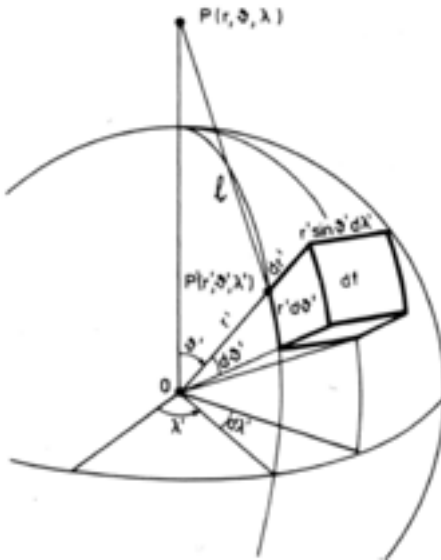
Στη συνέχεια, προκειμένου να απλουστευθούν οι τύποι, το σύστημα των σφαιρικών συντεταγμένων προσανατολίζεται έτσι ώστε ο άξονας $\vartheta = 0$ να συμπέσει με τη γραμμή που ενώνει το σημείο O με το σημείο P (Σχήμα 2.8). Το δυναμικό ενός ομογενούς σφαιρικού κελύφους απειροστού πάχους dr' και σταθερής πυκνότητας ρ που έχει ακτίνα r' δίνεται σε αναλογία με την (2.27) από τη σχέση

$$V' = G\rho dr' \iint_f \frac{df}{l}, \quad (2.28)$$

όπου η επιφάνεια ολοκλήρωσης είναι η επιφάνεια f του κελύφους και

$$df = r'^2 \sin \vartheta d\vartheta' d\lambda'$$

είναι ένα στοιχείο της επιφάνειας του κελύφους.



Σχήμα 2.8: Το δυναμικό σφαιρικού κελύφους

Κατά την ολοκλήρωση της (2.28) πρέπει να γίνει διάκριση, αν το ελχόμενο σημείο P βρίσκεται στο εξωτερικό ή στο εσωτερικό του κελύφους. Στην περίπτωση κατά την οποία το σημείο P βρίσκεται έξω από το κέλυφος, το δυναμικό είναι

$$V'_e = 4\pi G\rho \frac{r'^2}{r} dr' = G \frac{dm'}{r}, \quad (2.29)$$

όπου $dm' = 4\pi\rho r'^2 dr'$ η μάζα του σφαιρικού κελύφους. Το δυναμικό της σφαιρικής γης σύμφωνα με τα προηγούμενα θα είναι

$$V_e = G \int \int \int_{\gamma\eta} \frac{dm'}{r} = \frac{GM}{r}, \quad (2.30)$$

δηλ. ίσο με το δυναμικό της συνολικής μάζας M της γης συγκεντρωμένης στο κέντρο της μάζας. Με $GM = 398.6 \times 10^{12} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$ και την ακτίνα της γης $R = 6,371 \text{ km}$, η τιμή του δυναμικού στην επιφάνεια της γης ($r = R$) είναι $V = 6.26 \times 10^7 \text{m}^2 \text{s}^{-2}$ και η έλξη $b = 9.82 \text{ms}^{-2}$.

Στην περίπτωση κατά την οποία το σημείο P βρίσκεται μέσα στο σώμα της γης, προκύπτει

$$V'_i = 4\pi G \rho r' dr' = \frac{G}{r'} dm', \quad (2.31)$$

δηλ. το δυναμικό είναι σταθερό, ανεξάρτητα από τη θέση του P μέσα στο κέλυφος και επομένως η έλξη είναι ίση με μηδέν.

Το δυναμικό μέσα στη γη, η οποία αποτελείται από άπειρα αλληπάλλληλα κελύφη, είναι το άθροισμα του δυναμικού το οποίο οφείλεται στις μάζες στο εσωτερικό της σφαίρας ακτίνας $r = \text{σταθ.}$ (όπου r η απόσταση του P από το κέντρο) και του δυναμικού το οποίο οφείλεται στο κέλυφος πάχους $R - r$, όπου R η ακτίνα της (σφαιρικής) γης, δηλ.

$$V_i = \frac{4\pi G}{r} \int_0^r \rho r'^2 dr' + 4\pi G \int_r^R \rho r' dr'. \quad (2.32)$$

Για ομογενή σφαιρική γη ($\rho = \text{σταθ.}$) προκύπτει από την (2.32)

$$V_i = \frac{4\pi G r^2}{3} + 2\pi G \rho (R^2 - r^2) = 2\pi G \rho \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right). \quad (2.33)$$

2.2.1 Ιδιότητες του ελκτικού δυναμικού

Το δυναμικό V (2.27) και οι πρώτες παράγωγοι (σε συνδυασμό και με τη σχέση 2.23)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= V_x = -G \int \int \int_{\gamma\eta} \frac{x - x'}{l^3} dm, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= V_y = -G \int \int \int_{\gamma\eta} \frac{y - y'}{l^3} dm, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= V_z = -G \int \int \int_{\gamma\eta} \frac{z - z'}{l^3} dm, \end{aligned} \quad (2.34)$$

όπως και οι δεύτερες παράγωγοι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= V_{xx} = -G \int_{\gamma\eta} \int \int \frac{1}{l^3} dm + 3G \int_{\gamma\eta} \int \int \frac{(x-x')^2}{l^5} dm, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= V_{yy} = -G \int_{\gamma\eta} \int \int \frac{1}{l^3} dm + 3G \int_{\gamma\eta} \int \int \frac{(y-y')^2}{l^5} dm, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= V_{zz} = -G \int_{\gamma\eta} \int \int \frac{1}{l^3} dm + 3G \int_{\gamma\eta} \int \int \frac{(z-z')^2}{l^5} dm,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

είναι μονότιμα ορισμένες, πεπερασμένες και συνεχείς συναρτήσεις σε ολόκληρο το χώρο έξω από το φυσικό σώμα της γης (η μάζα της ατμόσφαιρας $M_{Atm} \cong 10^{-6}M$ θεωρείται στην περίπτωση αυτή αμελητέα) και μηδενίζονται για $l = \infty$.

Οι διαστάσεις των δευτερων μερικών παραγώγων του δυναμικού είναι s^{-2} .

Λαμβάνοντας υπόψη την τάξη μεγέθους και την ακρίβεια μέτρησης των δευτερων παραγώγων ($10^{-8} \dots 10^{-9}s^{-2}$), οι μονάδες που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι $10^{-9}s^{-2} = 1 \text{ E (Eötvös)} = 0.1 \times 10^{-5}ms^{-2}/km$.

Με εφαρμογή του τελεστή του Laplace σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{2.36}$$

στο V , αποδεικνύεται ότι το ελκτικό δυναμικό στο χώρο έξω από τις μάζες είναι αρμονική συνάρτηση. Πράγματι, με αντικατάσταση των (2.35) στη (2.36) προκύπτει

$$\Delta V = 0. \tag{2.37}$$

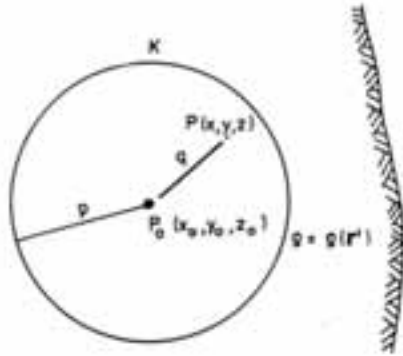
Η (2.37) είναι η διαφορική εξίσωση του Laplace (Laplace differential equation). Συνεχείς συναρτήσεις, οι οποίες έχουν συνεχείς πρώτες και δεύτερες παραγώγους και πληρούν την (2.37), καλούνται αρμονικές συναρτήσεις (harmonic functions) ή συναρτήσεις δυναμικού.

Για σημεία P μέσα στο σώμα της γης είναι δυνατή η περίπτωση $l = 0$. Τότε παρατηρείται ασυνέχεια η οποία οφείλεται στον όρο $1/l$. Για να μελετηθεί η περίπτωση αυτή θεωρείται το P κλεισμένο σε μια σφαίρα K κέντρου $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και ακτίνας p η οποία εκλέγεται αρκετά μικρή, ώστε η πυκνότητα ρ μέσα στη σφαίρα να είναι δυνατό να θεωρηθεί σταθερή (Σχήμα 2.9). Το δυναμικό στο σημείο P είναι τότε το άθροισμα του δυναμικού το οποίο οφείλεται στις μάζες έξω από τη σφαίρα K και του δυναμικού το οποίο οφείλεται στις μάζες στο εσωτερικό της σφαίρας K . Από τις σχέσεις (2.27) και (2.33) για

$$R = p, r = q = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

προκύπτει

$$V = G \int \int \int_{\gamma\eta-K} \frac{dm}{l} + 2\pi G\rho \left(p^2 - \frac{q^2}{3} \right). \quad (2.38)$$



Σχήμα 2.9: Το ελκτικό δυναμικό στο εσωτερικό της γης

Στην οριακή περίπτωση κατά την οποία τα p και q τείνουν στο μηδέν, η (2.38) συμφωνεί με την έκφραση για το δυναμικό έξω από τις μάζες (2.27).

Από την (2.38) προκύπτουν με παραγωγή οι πρώτες παράγωγοι του δυναμικού

$$\begin{aligned} V_x &= -G \int \int \int_{\gamma\eta-K} \frac{x - x'}{l^3} dm - \frac{4}{3} \pi G\rho(x - x_0), \\ V_y &= -G \int \int \int_{\gamma\eta-K} \frac{y - y'}{l^3} dm - \frac{4}{3} \pi G\rho(y - y_0), \\ V_z &= -G \int \int \int_{\gamma\eta-K} \frac{z - z'}{l^3} dm - \frac{4}{3} \pi G\rho(z - z_0). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Στην οριακή περίπτωση κατά την οποία το q τείνει στο μηδέν και οι διαφορές $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ τείνουν στο μηδέν και οι (2.39) συμφωνούν με τις αντίστοιχες εκφράσεις (2.34) για το δυναμικό έξω από τις μάζες. Με παραγωγή των (2.39) προκύπτουν οι δεύτερες παράγωγοι του δυναμικού

$$\begin{aligned} V_{xx} &= -G \int \int \int_{\gamma\eta-K} \frac{1}{l^3} dm + 3G \int \int \int_{\gamma\eta-K} \frac{(x - x')^2}{l^5} dm - \frac{4}{3} \pi G\rho \\ V_{yy} &= -G \int \int \int_{\gamma\eta-K} \frac{1}{l^3} dm + 3G \int \int \int_{\gamma\eta-K} \frac{(y - y')^2}{l^5} dm - \frac{4}{3} \pi G\rho \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$V_{zz} = -G \int_{\gamma\eta-K} \int \int \frac{1}{l^3} dm + 3G \int_{\gamma\eta-K} \int \int \frac{(z-z')^2}{l^5} dm - \frac{4}{3} \pi G \rho.$$

Με τον τρόπο αυτό αποδεικνύεται ότι το ελκτικό δυναμικό και οι πρώτες του παράγωγοι είναι μονότιμες, πεπερασμένες και συνεχείς συναρτήσεις στο εσωτερικό των μαζών. Οι δεύτερες παράγωγοι, σύμφωνα με τις (2.40), παρουσιάζουν ασυνέχειες για απότομες αλλαγές της πυκνότητας. Με εφαρμογή του τελεστή του Laplace στις (2.40) προκύπτει η διαφορική εξίσωση του Poisson

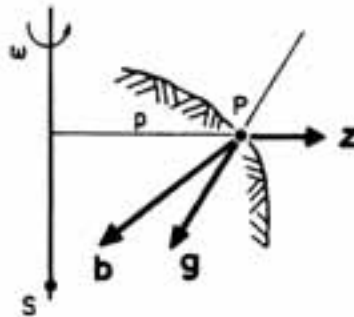
$$\Delta V = -4\pi G \rho. \quad (2.41)$$

2.2.2 Φυγοκεντρικό δυναμικό

Η φυγόκεντρη δύναμη οφείλεται στην περιστροφή της γης γύρω από τον άξονά της. Αν υποθέσουμε ότι η γη περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονα περιστροφής της που υποτίθεται σταθερός σε σχέση με τη γη, η φυγόκεντρη επιτάχυνση

$$\mathbf{z} = \omega^2 \mathbf{p} \quad (2.42)$$

που ενεργεί στη μονάδα της μάζας έχει διεύθυνση κάθετη στον άξονα περιστροφής (Σχήμα 2.10).



Σχήμα 2.10: Η επιτάχυνση \mathbf{b} , η φυγόκεντρη επιτάχυνση \mathbf{z} και η επιτάχυνση της βαρύτητας \mathbf{g}

Η γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2\pi/86,164.10 \text{ s} = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ είναι γνωστή με μεγάλη ακρίβεια από την αστρονομία.

Αν ο άξονας z του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (x, y, z) συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής, τότε

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p = |\mathbf{p}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Σε αναλογία με το ελκτικό δυναμικό εισάγεται το φυγόκεντρικό δυναμικό Φ με τη σχέση

$$\mathbf{z} = \text{grad } \Phi, \quad (2.43)$$

όπου

$$\Phi = \Phi(p) = \frac{\omega^2}{2} p^2, \quad (2.44)$$

το οποίο σε αντίθεση με το δυναμικό V δεν είναι αρμονική συνάρτηση, αφού ισχύει

$$\Delta \Phi = 2\omega^2. \quad (2.45)$$

Η τιμή του Φ για σημεία στον ισημερινό της γης είναι $\Phi = 1.1 \times 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-2}$ και η τιμή του $z = |\mathbf{z}| = 0.03 \text{m s}^{-2} (\approx 0.3\% \text{ της επιτάχυνσης των ελκτικών δυνάμεων})$. Στους πόλους έχουμε $\Phi = 0, z = 0$.

2.2.3 Γεωδυναμικό

Η επιτάχυνση της βαρύτητας ή απλά βαρύτητα \mathbf{g} είναι η συνισταμένη της έλξης \mathbf{b} και της φυγόκεντρης δύναμης \mathbf{z} (Σχήμα 2.10), δηλ.

$$\mathbf{g} = \mathbf{b} + \mathbf{z}. \quad (2.46)$$

Η διεύθυνση του διανύσματος \mathbf{g} είναι γνωστή ως διεύθυνση της καταχορύφου ενώ το μέτρο g του \mathbf{g} είναι γνωστό ως ένταση της βαρύτητας (μερικές φορές λέγοντας βαρύτητα εννοούμε την ένταση της βαρύτητας).

Το δυναμικό της βαρύτητας W (gravity potential) είναι το άθροισμα των δυναμικών V και Φ , δηλ.

$$W = V + \Phi \quad (2.47)$$

και ως άθροισμα μιας αρμονικής και μιας μη αρμονικής συνάρτησης δεν είναι αρμονική συνάρτηση. Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις (2.37) και (2.45) έχουμε για το δυναμικό W έξω από τις μάζες

$$\Delta W = 2\omega^2, \quad (2.48)$$

ενώ αν προσθέσουμε τις (2.41) και (2.45) έχουμε για το δυναμικό W μέσα στις μάζες

$$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2. \quad (2.49)$$

Λόγω της πλάτυνσης στους πόλους και της φυγόκεντρης επιτάχυνσης, η ένταση της βαρύτητας g μεταβάλλεται στην επιφάνεια της γης μεταξύ 9.78m s^{-2} (ισημερινός) και 9.83m s^{-2} (πόλοι).

2.2.4 Ανάπτυγμα του ελκτικού δυναμικού σε σειρά

Επειδή η συνάρτηση της πυκνότητας $r = r(\mathbf{r}')$ δεν είναι γνωστή, το δυναμικό των ελκτικών δυνάμεων $V = V(r)$ δεν είναι δυνατό να υπολογισθεί από την (2.27). Είναι όμως δυνατό να αναπτυχθεί σε σειρά που συγκλίνει έξω από τη γη. Προσεγγιστικά μια τέτοια ανάπτυξη μπορεί να εφαρμοσθεί ακόμη και επάνω στην επιφάνεια της γης. Προκειμένου να σχηματίσουμε ένα τέτοιο ανάπτυγμα του δυναμικού θα αναπτύξουμε πρώτα το αντίστροφο της απόστασης σε σειρά. Με εφαρμογή του νόμου του συνημιτόνου (Σχήμα 2.11) προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για το αντίστροφο της απόστασης l μεταξύ έλκοντος σημείου P' και ελκόμενου σημείου P του τύπου (2.27) [3]

$$\frac{1}{l} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \psi \right]^{-1/2}. \quad (2.50)$$

Αναπτύσσοντας το $1/l$ σε σειρά συγκλίνουσα για $r' < r$ κατά τις αυξανόμενες δυνάμεις του r'/r έχουμε

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \psi), \quad (2.51)$$

όπου $P_n(\cos \psi)$ παριστάνουν πολυώνυμα βαθμού n ως προς $\cos \psi$ και είναι γνωστά ως πολυώνυμα του Legendre (Legendre polynomials) ή ακόμη σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις (spherical harmonic functions). Τα πολυώνυμα αυτά υπολογίζονται από τη σχέση

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (t^2 - 1)^n}{dt^n}, \quad (2.52)$$

όπου $t = \cos \psi$.

Στην πράξη για τον υπολογισμό των πολυωνύμων του Legendre χρησιμοποιείται ο αναδρομικός (recursive) τύπος

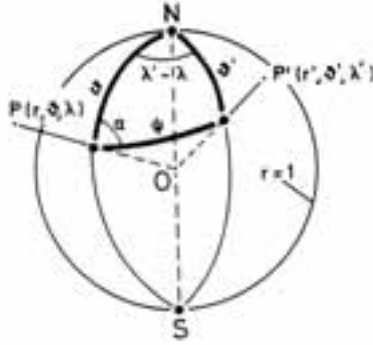
$$(n-1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t). \quad (2.53)$$

Με τη βοήθεια του τύπου (2.53) υπολογίζεται το πολυώνυμο του Legendre βαθμού $n+1$, όταν είναι γνωστά τα πολυώνυμα βαθμού $n-1$ και n για το συγκεκριμένο όρισμα t .

Αν ψ είναι η σφαιρική απόσταση μεταξύ έλκοντος και ελκόμενου σημείου επάνω σε μια μοναδιαία σφαίρα ($r = 1$) (Σχήμα 2.11), τότε

$$\cos \psi = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\lambda - \lambda'). \quad (2.54)$$

Με τη βοήθεια της (2.54) τα πολυώνυμα του Legendre εκφράζονται συναρτήσει των σφαιρικών συντεταγμένων (r, ϑ, λ) από τη σχέση



Σχήμα 2.11: Σφαιρική απόσταση μεταξύ δύο σημείων

$$\begin{aligned}
 P_n(\cos \psi) &= P_n(\cos \vartheta)P_n(\cos \vartheta') \\
 &+ 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda P_{nm}(\cos \vartheta') \cos m\lambda' \\
 &+ P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda P_{nm}(\cos \vartheta') \sin m\lambda], \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

όπου οι νέες συναρτήσεις $P_{nm}(\cos \vartheta)$ είναι γνωστές ως προσαρτημένες συναρτήσεις του Legendre (associated Legendre functions) πρώτου είδους ($n =$ βαθμός/degree, $m =$ τάξη/order) και υπολογίζονται με διαφορίση του πολωνύμου $P_n(\cos \vartheta)$ m φορές

$$P_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t). \quad (2.56)$$

Η προσαρτημένη συνάρτηση του Legendre βαθμού n και τάξης 0 συμπίπτει με το πολώνυμο του Legendre βαθμού n , δηλ.

$$P_{n0}(t) = P_n(t). \quad (2.57)$$

Στη συνέχεια δίνονται οι τιμές των πολωνύμων και των προσαρτημένων συναρτήσεων του Legendre με όρισμα $t = \cos \vartheta$ που αντιστοιχούν στους βαθμούς $n = 0, 1, 2$:

$$P_0(t) = 1, P_1(t) = \cos \vartheta, P_{11}(t) = \sin \vartheta,$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \vartheta - 1), P_{21} = 3 \sin \vartheta \cos \vartheta, P_{22}(t) = 3 \sin^2 \vartheta.$$

Με αντικατάσταση της (2.55) στη (2.51) προκύπτει το ανάπτυγμα του $1/l$, ενώ το ζητούμενο ανάπτυγμα του δυναμικού συναρτήσεων των σφαιρικών συντεταγμένων (r, ϑ, λ) προκύπτει με αντικατάσταση των (2.51) και (2.55) στην (2.27)

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{r}) &= \frac{G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n k \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\
&\cdot \frac{1}{r^n} \left\{ P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda \int \int \int_{\gamma\eta} r'^n P_{nm}(\cos \vartheta') \cos m\lambda' dm \right. \\
&+ \left. P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda \int \int \int_{\gamma\eta} r'^n P_{nm}(\cos \vartheta') \sin m\lambda' dm \right\}, \quad (2.58)
\end{aligned}$$

όπου

$$k = \begin{cases} 1 & \text{για } m = 0 \\ 2 & \text{για } m \neq 0 \end{cases}.$$

Για $n = 0$ η ολοκλήρωση της (2.58) δίνει το δυναμικό της μάζας M της γης συγκεντρωμένης στο κέντρο της. Αν εξαχθεί ο όρος αυτός ως κοινός παράγοντας, θεωρηθεί ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς σταθερός και χρησιμοποιηθούν για τα ολοκληρώματα της μάζας οι συμβολισμοί C_{nm}, S_{nm} αντίστοιχα, αντί της (2.58) προκύπτει η ακόλουθη έκφραση, που αποτελεί μια λύση της διαφορικής εξίσωσης του Laplace

$$V(\mathbf{r}) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta) \right], \quad (2.59)$$

όπου

$$C_{n0} = C_n = \frac{1}{M} \int \int \int_{\gamma\eta} \left(\frac{r'}{a} \right)^n P_n(\cos \vartheta') dm, \quad (2.60)$$

$$\begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{2}{M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int \int \int_{\gamma\eta} \left(\frac{r'}{a} \right)^n P_n(\cos \vartheta') \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} dm.$$

Για την περιγραφή του πεδίου βαρύτητας χρησιμοποιούνται συνήθως οι πλήρως κανονικοποιημένες σφαιρικές αρμονικές (fully normalized spherical harmonics) οι οποίες έχουν μέση τετραγωνική τιμή επάνω στην επιφάνεια της γης ίση με τη μονάδα. Οι πλήρως κανονικοποιημένες προσαρτημένες συναρτήσεις \bar{P}_{nm} του Legendre προκύπτουν από τις συναρτήσεις P_{nm} του Legendre με τη βοήθεια της σχέσης

$$\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{k(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(\cos \vartheta), \quad (2.61)$$

ενώ οι πλήρως κανονικοποιημένοι συντελεστές \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} του αναπτύγματος του δυναμικού σε σφαιρικές αρμονικές προκύπτουν από τους αντίστοιχους συντελεστές C_{nm} , S_{nm} από τη σχέση

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{k(2n+1)(n-m)!}} \left\{ \begin{array}{l} C_{nm} \\ S_{nm} \end{array} \right\}, \quad (2.62)$$

όπου ο συντελεστής k έχει την ίδια σημασία όπως και στη σχέση (2.58).

Το ανάπτυγμα (2.59) συγκλίνει στο χώρο έξω από μια σφαίρα ακτίνας $r = a$ που περιλαμβάνει τη γη. Το ανάπτυγμα αυτό δεν ισχύει για το εσωτερικό της γης, όπου το δυναμικό, αντί της διαφορικής εξίσωσης του Laplace (2.37), ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση του Poisson (2.41). Σύμφωνα με το θεώρημα Runge-Kragur [4] ένα τέτοιο ανάπτυγμα σε συγκλίνουσα σειρά σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων μπορεί να ισχύει ως μια καλή προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας ακόμη και στο εσωτερικό της σφαίρας $r = a$ μέχρι την επιφάνεια της γης [1]. Οι συναρτήσεις

$$P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda, P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda,$$

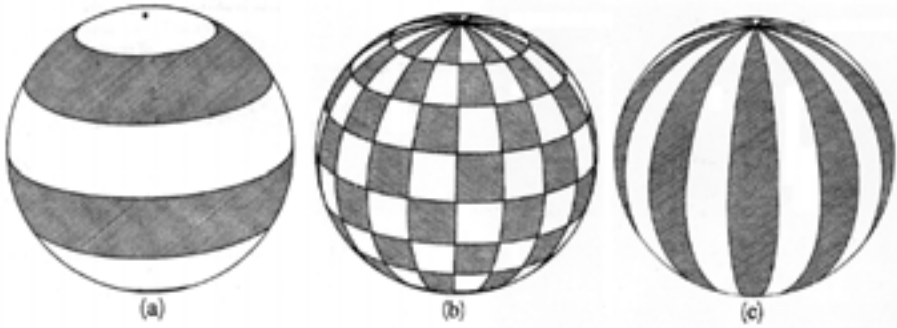
που εμφανίζονται στην (2.59) είναι γνωστές ως επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις του Laplace (Laplace surface spherical harmonic functions) και περιγράφουν τη συμπεριφορά του δυναμικού V στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας ($r = 1$). Τα σημεία όπου μηδενίζονται οι συναρτήσεις αυτές (ρίζες των αντιστοιχών πολυωνύμων) διαιρούν την επιφάνεια της σφαίρας σε τομείς με εναλλασσόμενο πρόσημο, με γεωδαιτικές παραλλήλους και μεσημβρινούς [2].

Ειδικότερα: Η συνθήκη $m = 0$ οδηγεί στην ειδική περίπτωση των πολυωνύμων του Legendre $P_n(\cos \vartheta)$, τα οποία είναι πολυώνυμα βαθμού n ως προς $t = \cos \vartheta$, ανεξάρτητα του λ . Τα πολυώνυμα αυτά μηδενίζονται σε n σημεία στο διάστημα $0 \leq \vartheta \leq \pi$, δηλ. αλλάζουν πρόσημο n φορές στο διάστημα αυτό. Η γεωμετρική τους παράσταση φαίνεται στο Σχήμα (2.12a), σύμφωνα με την οποία διαιρούν τη σφαίρα σε ζώνες και για το λόγο αυτό ονομάζονται *σφαιρικές των ζωνών* (zonal harmonics).

Για $m \neq 0$ οι προσαρτημένες συναρτήσεις του Legendre μηδενίζονται $n - m$ φορές στο διάστημα $0 < \vartheta < \pi$ και επειδή οι επιφανειακές αρμονικές πολλαπλασιάζονται επί $\cos m\lambda$ ή $\sin m\lambda$, δηλ. εξαρτώνται από το λ , μηδενίζονται $2m$ φορές στο διάστημα $0 \leq \lambda \leq 2\pi$. Η γεωμετρική τους παράσταση φαίνεται στο Σχήμα (2.12b), σύμφωνα με την οποία διαιρούν τη σφαίρα σε τραπεζοειδείς επιφάνειες και για το λόγο αυτό ονομάζονται *τραπεζοειδείς αρμονικές* (tesseral harmonics).

Τέλος, στην περίπτωση κατά την οποία $m = n$, η γεωμετρική παράσταση αντιστοιχεί σε εκείνη του Σχήματος (2.12c), δηλ. οι επιφανειακές αρμονικές διαιρούν τη σφαίρα σε τομείς, οπότε ονομάζονται *σφαιρικές των τομέων* (sectorial harmonics).

Η ανάπτυξη σε σφαιρικές αρμονικές αντιστοιχεί με μια φασματική ανάλυση των χαρακτηριστικών του πεδίου βαρύτητας μήκους κύματος $360^\circ/n$ (που αν-



Σχήμα 2.12: Επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές του Laplace στη μοναδιαία σφαίρα. (a) $P_5(\cos \vartheta)$, (b) $P_{16}(\cos \vartheta) \cos 9\lambda$, (c) $P_9(\cos \vartheta) \cos 9\lambda$

τιστοιχεί σε διακριτική ικανότητα $180^\circ/n$). Τα πολώνυμα Legendre (2.52) παριστάνουν ένα πεδίο συμμετρικό ως προς άξονα περιστροφής, διαιρώντας τη σφαίρα σε ζώνες κατά την έννοια του πλάτους, όπου περιττοί n σημαίνουν συμμετρία ως προς τον ισημερινό. Ο όρος μηδενικής τάξης αντιστοιχεί στο δυναμικό μιας ομογενούς ή ακτινικά διαστρωματωμένης γης (στη 2.59 ο όρος αυτός έχει εξαχθεί ως κοινός παράγοντας). Από την ίδια εξίσωση (2.59) είναι προφανές ότι το πεδίο εξομαλύνεται εξαιτίας του παράγοντα $(a/r)^n$ καθώς αυξάνει η τιμή του r . Οι λευκές επιφάνειες αντιστοιχούν σε θετικό πρόσημο και οι διαγραμμισμένες σε αρνητικό.

Το ανάπτυγμα του δυναμικού σε σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις μπορεί ακόμη να προκύψει από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης του Laplace (2.37), με την προϋπόθεση ότι το δυναμικό V εκφράζεται σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, ϑ, λ) .

Βιβλιογραφία

- [1] Δ. Αραμπέλου. *Στοιχεία Βαρυτημετρίας*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1985.
- [2] W.A. Heiskanen, H. Moritz. *Physical Geodesy*. W. H. Freeman and Co., San Francisco and London, 1967.
- [3] O. Kellog. *Foundations of potential theory*. Dover Publ., New York, 1953.
- [4] H. Moritz. *Advanced Physical Geodesy*. Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1980.
- [5] W. Torge. *Geodesy*. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1980.
- [6] W. Torge. *Gravimetry*. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1989.