Δημήτριος Ν. Αραμπέλος

Εισαγωγή στη Θεωρία του Δυναμικού

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Θεσσαλονίκη

Β΄ Έκδοση

Δημήτριος Ν. Αραμπέλος

Καθηγητής Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

ISBN 960-431-807-1

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 03920-72.222 (5 γραμ.) - Fax: 03920-72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 0310-203.720, Fax 0310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Πρόλογος

Η εισαγωγή στη θεωρία του δυναμικού απευθύνεται στους φοιτητές και φοιτήτριες των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών Τμημάτων Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης (ΑΠΘ), του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου (ΕΜΠ) και άλλων συναφών πανεπιστημιακών Τμημάτων και έχει στόχο την υποστήριξη των γνωστικών περιοχών οι οποίες ασχολούνται με τη μελέτη του πεδίου βαρύτητας.

Είναι προφανής η δυσκολία να γραφτεί σήμερα ένα βιβλίο σχετικό με τη θεωρία του δυναμικού, όταν στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν πάρα πολλά συγγράμματα, τα οποία θεωρούνται κλασικά έργα. Η προσπάθεια αυτή έγινε, επειδή στην ελληνική βιβλιογραφία δεν υπάρχει ένα βοήθημα το οποίο να συγκεντρώνει το απαραίτητο υλικό, ώστε να χρησιμεύσει ως θεωρητικό υπόβαθρο για τη μελέτη του πεδίου βαρύτητας.

Η ύλη διαιρείται σε έξι μέρη. Στο πρώτο μέρος γίνεται μια επανάληψη του Διανυσματικού Λογισμού, με έμφαση στις ιδιότητες του διαφορκού διανυσματικού τελεστή ‘‘ανάδελτα’’ και στη φυσική σημασία της εφαρμογής του σε βαθμωτές και διανυσματικές συναρτήσεις. Στο ίδιο μέρος περιλαμβάνονται οι ταυτότητες του Gauss, του Green και το θεώρημα του Stokes.

Οι ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες εξετάζονται στο δεύτερο μέρος, το οποίο μετά από τα γενικά εστιάζεται στη μελέτη των τριών ειδικών ορθογώνιων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων, οι οποίες είναι περισσότερο χρήσιμες στις εφαρμογές, δηλ. των κυλινδρικών, οι οποίες είναι χρήσιμες π.χ. στην αναγωγή του πεδίου βαρύτητας σε ορισμένο ύψος επάνω από την επιφάνεια αναφοράς, των σφαιρικών, οι οποίες βρίσκουν ευρεία εφαρμογή σε όλες τις περιπτώσεις σφαιρικής προσέγγισης του πεδίου βαρύτητας, και των ελλειψοειδών, οι οποίες είναι απαραίτητες στη δημιουργία μοντέλων βαρύτητας.

Η εισαγωγή στη θεωρία του δυναμικού γίνεται στα υπόλοιπα τέσσερα μέρη. Συγκεκριμένα, στο τρίτο μέρος εξετάζεται η ελκτική δύναμη ανάμεσα στις μάζες για σημειακή κατανομή, πεπερασμένο αριθμό σημειακών μαζών, συνεχή κατανομή μάζας στο χώρο, κατανομή απλού και διπλού στρώματος. Εισάγεται η έννοια του δυναμικού και εξετάζονται οι ιδιότητες του δυναμικού και της έλξης στο χώρο έξω από τις μάζες.

Στο τέταρτο μέρος γίνεται προσπάθεια ερμηνείας των ολοκληρωματικών τύπων της θεωρίας του δυναμικού και εξετάζονται οι ιδιότητες του δυναμικού και των παραγώγων του πρώτης και δεύτερης τάξης για τις ίδιες κατανομές μάζας, που αναφέρθηκαν προηγουμένως, στο χώρο μέσα στις μάζες ή επάνω στην επιφάνεια που τις περικλείει.

Στο πέμπτο μέρος αναλύεται η διαδικασία ανάπτυξης του δυναμικού σε σειρά σφαιρικών και ελλειψοειδών αρμονικών συναρτήσεων. Με αφετηρία την ανάπτυξη του αντιστρόφου της απόστασης μεταξύ δύο σημείων σε σειρά δυνάμεων γίνεται παρουσίαση των σφαιρικών αρμονικών ως λύσεων της εξίσωσης του Laplace και της ανάπτυξης σε σειρά σφαιρικών αρμονικών. Παρουσιάζονται τύποι για τον υπολογισμό πολυωνύμων και προσαρτημένων συναρτήσεων του Legendre και η διαδικασία ανάπτυξης εμπειρικών συναρτήσεων σε σειρά σφαιρικών αρμονικών.

Τέλος, στο έκτο μέρος γίνεται αναφορά στα προβλήματα των συνοριακών τιμών της θεωρίας του δυναμικού και σε κλασικές μεθόδους επίλυσής τους. Γίνεται διερεύνηση για το μονοσήμαντο των προβλημάτων των συνοριακών τιμών και διατύπωση του προβλήματος του Dirichlet, του Neumann και του μικτού προβλήματος των συνοριακών τιμών. Ακόμη γίνεται αναφορά στην επίλυση με τη βοήθεια ολοκληρωματικών τύπων και στις προϋποθέσεις ύπαρξης λύσης. Δεν γίνεται αναφορά στις αναγωγές που απαιτούνται για τον ακριβή προσδιορισμό του γεωειδούς ή στο διπλό πρόβλημα των συνοριακών τιμών, θέματα τα οποία αναπτύσσονται στα πλαίσια άλλων μαθημάτων, όπως η ‘‘Βαρυτημετρία’’, η ‘‘Φυσική Γεωδαισία’’ κ.λπ.

Στα σημεία, όπου κρίνεται απαραίτητο, παρεμβάλλονται εφαρμογές για να γίνεται κατανοητή η χρησιμότητα της αντίστοιχης ύλης.

Το βιβλίο περιορίζεται στην κλασική ανάπτυξη της θεωρίας του δυναμικού. Δίνεται έμφαση στους ορισμούς, στις έννοιες, στις προϋποθέσεις με τις οποίες ισχύουν οι διάφορες ιδιότητες, και στις αποδεικτικές διαδικασίες.

Η βιβλιογραφία που παρατίθεται σε καμμιά περίπτωση δεν καλύπτει το μεγάλο αριθμό των συγγραμμάτων που ασχολούνται με τη γνωστική αυτή περιοχή. Περιλαμβάνει μόνο τα έργα τα οποία συμβουλεύτηκε ο συγγραφέας. Ορισμένων από αυτά έγινε εκτεταμένη χρήση.

Ευχαριστώ θερμά την κυρία Ι. Καρρίντη για τη συμβολή της στη γραμματική και συντακτική αρτιότητα του κειμένου και τους φοιτητές μου που με την προσεκτική μελέτη των σημειώσεων εντόπισαν αρκετά λάθη στους τύπους.

Το βιβλίο αφιερώνεται στη μνήμη της συζύγου μου Μαρίας Μανιδάκη, που ανέχθηκε αυτές τις ανοησίες μου επί τριάντα χρόνια με ιώβεια υπομονή.

Θεσσαλονίκη, Σεπτέμβριος 2002 — Δ. Αραμπέλος

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες του διανυσματικού λογισμού - οι ταυτότητες του **Gauss** και του **Green**, το θεώρημα του **Stokes**

1.1 Βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη - άλγεβρα διανυσμάτων

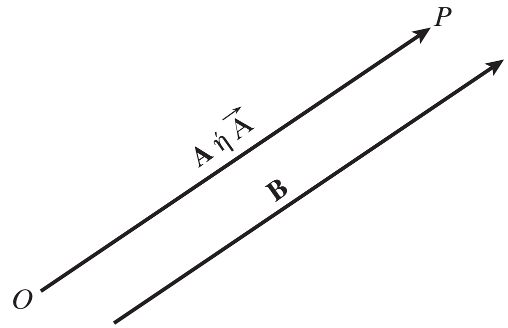
1.1.1 Βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη

Διανυσμα (vector) είναι ένα μέγεθος το οποίο ορίζεται με τρεις παραμέτρους, *μέτρο*, *διεύθυνση* και *φορά*. Τέτοια μεγέθη είναι η μετατόπιση, η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση.

Γραφικά, ένα διάνυσμα παριστάνεται από ένα βέλος OP (Σχήμα 1.1), το οποίο ορίζει τη διεύθυνση του διανύσματος. Το *μέτρο* ή *μήκος* του διανύσματος ορίζεται από το μήκος του βέλους. Το σημείο O είναι η *αρχή* και το P το *πέρας* του διανύσματος.

Αναλυτικά, ένα διάνυσμα παριστάνεται με ένα γράμμα πάνω από το οποίο υπάρχει ένα βέλος, όπως το $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ στο Σχήμα 1.1, ενώ το μέτρο του συμβολίζεται με $\left|\overrightarrow{A}\right|$ ή απλά A.

Σε γραπτά κείμενα το διάνυσμα $\overrightarrow{A}$ συμβολίζεται με ένα γράμμα έντονο π.χ. **A**, ενώ το μέτρο του συμβολίζεται με $|\mathbf{A}|$ ή απλά A. Ακόμη για το διάνυσμα OP χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ ή **OP**. Στην περίπτωση αυτή το μέτρο συμβολίζεται ως $\overline{\mathrm{OP}}$ ή $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ ή $|\mathbf{OP}|$.



Σχήμα 1.1: Παράσταση διανύσματος

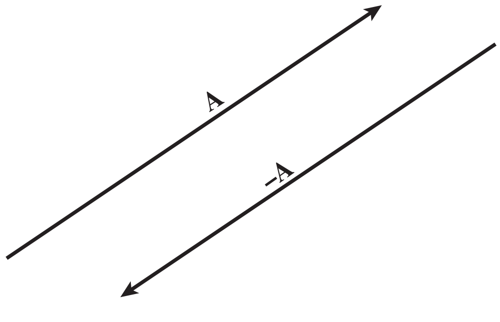
Βαθμωτο (scalar) είναι ένα μέγεθος το οποίο έχει μέτρο αλλά όχι διεύθυνση. Βαθμωτά μεγέθη είναι π.χ. η μάζα, το μήκος, ο χρόνος, η θερμοκρασία και κάθε πραγματικός αριθμός. Τα βαθμωτά ή αριθμητικά μεγέθη συμβολίζονται με τα συνήθη γράμματα τα οποία χρησιμοποιούνται στην άλγεβρα των αριθμών. Οι πράξεις μεταξύ βαθμωτών μεγεθών ακολουθούν τους αλγεβρικούς κανόνες.

1.1.2 Άλγεβρα διανυσμάτων

Οι αλγεβρικές πράξεις της πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού, οι οποίες ισχύουν στην άλγεβρα των αριθμών, επεκτείνονται με κατάλληλο τρόπο και στην άλγεβρα των διανυσμάτων. Οι ακόλουθοι ορισμοί είναι θεμελιώδεις:

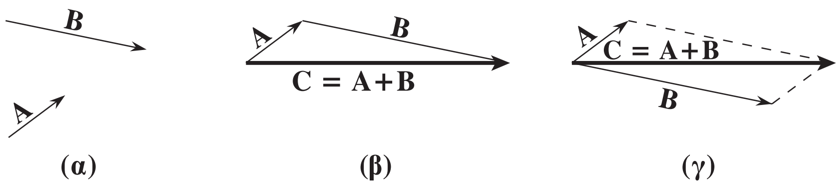
1. Δύο διανύσματα **A** και **B** είναι ίσα εάν έχουν το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση και την ίδια φορά, ανεξάρτητα από την αρχή τους.

2. Ένα διάνυσμα που έχει φορά αντίθετη εκείνης του διανύσματος **A**, συμβολίζεται με -**A** (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2: Διανύσματα με αντίθετη φορά

3. Το *άθροισμα* των διανυσμάτων $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι ένα διάνυσμα $\mathbf{C}$ το οποίο σχηματίζεται τοποθετώντας την αρχή του $\mathbf{B}$ στο πέρας του $\mathbf{A}$ και συνδέοντας την αρχή του $\mathbf{A}$ με το πέρας του $\mathbf{B}$ (Σχήμα 1.3a και b). Το άθροισμα συμβολίζεται $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με τον *κανόνα του παραλληλογράμμου* για την πρόσθεση των διανυσμάτων (Σχήμα 1.3c).



Σχήμα 1.3: Άθροισμα δύο διανυσμάτων και ο κανόνας του παραλληλογράμμου

Ο ορισμός του αθροίσματος επεκτείνεται άμεσα σε περισσότερα από δύο διανύσματα. Στο Σχήμα 1.4 το διάνυσμα $\mathbf{E}$ είναι το άθροισμα των διανυσμάτων $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ και $\mathbf{D}$.

Σχήμα 1.4: Άθροισμα περισσοτέρων των δύο διανυσμάτων

4. Η *διαφορά* των διανυσμάτων $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, η οποία συμβολίζεται $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ είναι το διάνυσμα $\mathbf{C}$, το οποίο εάν προστεθεί στο $\mathbf{B}$ δίνει το διάνυσμα $\mathbf{A}$. Ισοδύναμα, η διαφορά $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ορίζεται ως το άθροισμα $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.

5. Το *γινόμενο* ενός διανύσματος $\mathbf{A}$ επί το βαθμωτό μέγεθος m είναι ένα διάνυσμα $m\mathbf{A}$ με μέτρο $|m|$ φορές το μέτρο του $\mathbf{A}$, διεύθυνση τη διεύθυνση του $\mathbf{A}$ και φορά τη φορά του $\mathbf{A}$, αν ο m είναι θετικός ή αντίθετη αυτής, αν ο m είναι αρνητικός. Αν $m = 0$, $m\mathbf{A}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.

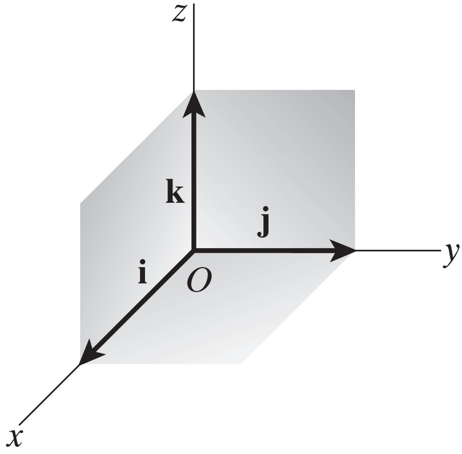
Ιδιοτητες της αλγεβρας των διανυσματων. Εάν $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$ είναι διανύσματα και m, n βαθμωτά μεγέθη, τότε

1.	$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$	Αντιμεταθετική ιδιότητα για την πρόσθεση
2.	$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$	Προσεταιριστική ιδιότητα για την πρόσθεση
3.	$m\mathbf{A}=\mathbf{A}m$	Αντιμεταθετική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό
4.	$m(n\mathbf{A})=(mn)\mathbf{A}$	Προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό
5.	$(m+n)\mathbf{A}=m\mathbf{A}+n\mathbf{A}$	Επιμεριστική ιδιότητα
6.	$m(\mathbf{A}+\mathbf{B})=m\mathbf{A}+m\mathbf{B}$	Επιμεριστική ιδιότητα

Μοναδιαιο διανυσμα είναι ένα διάνυσμα με μέτρο ίσο με τη μονάδα. Εάν $\mathbf{A}$ είναι ένα διάνυσμα με μέτρο $\mathrm{A} \neq 0$, τότε $\mathbf{A}/\mathrm{A}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα με διεύθυνση και φορά τη διεύθυνση και τη φορά του $\mathbf{A}$.

Κάθε διάνυσμα $\mathbf{A}$ μπορεί να παρίσταται από ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{a}$ με διεύθυνση και φορά τη διεύθυνση και τη φορά του $\mathbf{A}$, πολλαπλασιασμένο επί το μέτρο του $\mathbf{A}$, δηλ. $\mathbf{A}=\mathrm{A}\mathbf{a}$.

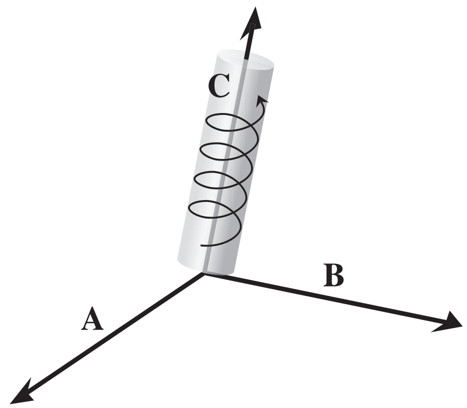
Ορθογωνια μοναδιαια διανυσματα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, είναι το σύνολο των μοναδιαίων διανυσμάτων τα οποία έχουν διευθύνσεις αντίστοιχες προς τους θετικούς άξονες x, y, z ενός τρισορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων (Σχήμα 1.5).



Σχήμα 1.5: Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

Στη συνέχεια, εκτός αν ορίζεται διαφορετικά, χρησιμοποιούνται δεξιόστροφα συστήματα συντεταγμένων. Ένα τέτοιο σύστημα αντλεί την ονομασία του από το γεγονός ότι ένας δεξιόστροφος κοχλίας που περιστρέφεται κατά $90°$ από Ox προς Oy προχωρεί κατά τη διεύθυνση του θετικού z (βλ. Σχήμα 1.6).

Γενικά, τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$, τα οποία έχουν κοινή αρχή, σχηματίζουν ένα δεξιόστροφο σύστημα, εάν ένας δεξιόστροφος κοχλίας, ο

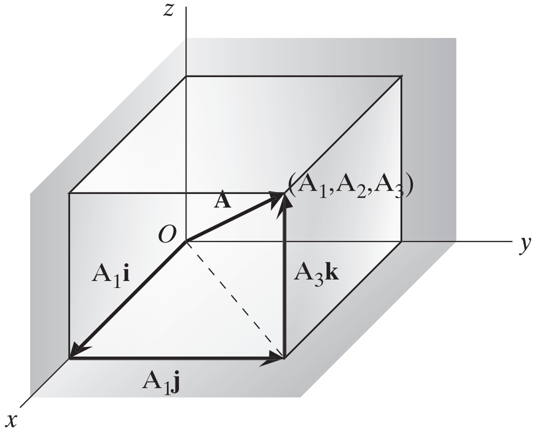


Σχήμα 1.6: Δεξιόστροφο σύστημα

οποίος περιστρέφεται από το **A** προς το **B**, προχωρεί κατά τη διεύθυνση του **C**.

1.1.3 Συντεταγμένες διανύσματος

Κάθε διάνυσμα **A** του χώρου των τριών διαστάσεων μπορεί να παρασταθεί με αρχή την αρχή O ένος ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων (Σχήμα 1.7). Έστω (A_1, A_2, A_3) οι συντεταγμένες του πέρατος του διανύσματος **A** με αρχή το O. Τα διανύσματα $\mathrm{A}_1\mathbf{i}, \mathrm{A}_2\mathbf{j}$ και $\mathrm{A}_3\mathbf{k}$ καλούνται *διανύσματα-ορθογώνιες συνιστώσες* ή απλά *διανύσματα-συνιστώσες* του **A** στις διευθύνσεις x, y, z αντίστοιχα. Τα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ καλούνται *ορθογώνιες συνιστώσες* ή απλά *συνιστώσες* του **A** στις διευθύνσεις x, y, z αντίστοιχα.



Σχήμα 1.7: Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

Το άθροισμα των $\mathrm{A}_1\mathbf{i}, \mathrm{A}_2\mathbf{j}$ και $\mathrm{A}_3\mathbf{k}$ είναι το διάνυσμα $\mathbf{A}$, δηλ.

$$\mathbf{A} = \mathrm{A}_1\mathbf{i} + \mathrm{A}_2\mathbf{j} + \mathrm{A}_3\mathbf{k}. \tag{1.1}$$

Το μέτρο του $\mathbf{A}$ είναι

$$\mathrm{A} = |\mathbf{A}| = \sqrt{\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2^2 + \mathrm{A}_3^2}. \tag{1.2}$$

Ιδιαίτερα, το *διάνυσμα θέσης* ή *διανυσματική ακτίνα* $\mathbf{r}$ από το O του σημείου (x, y, z) συμβολίζεται

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{1.3}$$

και έχει μέτρο

$$\mathrm{r} = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

1.1.4 Πεδίο βαθμωτών μεγεθών και πεδίο διανυσμάτων

Πεδιο βαθμωτων μεγεθων. Εάν σε κάθε σημείο (x, y, z) της περιοχής R του χώρου αντιστοιχεί ένας αριθμός ή ένα βαθμωτό μέγεθος $\phi(x, y, z)$, τότε ϕ καλείται *βαθμωτή συνάρτηση θέσης* ή *βαθμωτή σημειακή συνάρτηση* (scalar point function). Στην περίπτωση αυτή ένα *βαθμωτό πεδίο* (scalar field) ϕ ορίζεται στην R.

Παραδείγματα: *(1)* Η ατμοσφαιρική πίεση σε κάθε σημείο στην επιφάνεια της γης σε μια ορισμένη χρονική στιγμή είναι ένα βαθμωτό πεδίο.

(2) Η συνάρτηση $\phi(x, y, z) = xy^2 - z^3$ ορίζει ένα βαθμωτό πεδίο.

Ένα βαθμωτό πεδίο, το οποίο είναι ανεξάρτητο του χρόνου, καλείται *στατικό βαθμωτό πεδίο* (stationary scalar field).

Πεδιο διανυσματων. Εάν σε κάθε σημείο (x, y, z) της περιοχής R του χώρου αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $\mathbf{V}(x, y, z)$, τότε το $\mathbf{V}$ καλείται *διανυσματική συνάρτηση θέσης* ή *διανυσματική σημειακή συνάρτηση* (vector point function). Στην περίπτωση αυτή ένα *διανυσματικό πεδίο* (vector field) $\mathbf{V}$ ορίζεται στην R.

Ένα διανυσματικό πεδίο, το οποίο είναι ανεξάρτητο του χρόνου, καλείται *στατικό διανυσματικό πεδίο* (stationary vector field).

1.2 Το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο

1.2.1 Το εσωτερικό γινόμενο

Το *εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο* (dot product) δύο διανυσμάτων $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, το οποίο συμβολίζεται $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, ορίζεται ως το γινόμενο των μέτρων των $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ και

Παραδείγματα: *(1)* Εάν η ταχύτητα σε κάθε σημείο (x, y, z) μέσα σε κινούμενο ρευστό είναι γνωστή σε ορισμένη χρονική στιγμή, τότε ορίζεται ένα διανυσματικό πεδίο.

(2) Η συνάρτηση $\mathbf{V}(x, y, z) = xy^3\mathbf{i} - 2yz^3\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$ ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο.

του συνημιτόνου της μεταξύ τους γωνίας ϑ

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathrm{AB}\cos\vartheta, \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \tag{1.4}$$

δηλ. το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτό μέγεθος.

Για το εσωτερικό γινόμενο ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

1. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ Αντιμεταθετική ιδιότητα
2. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ Επιμεριστική ιδιότητα
3. $m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})m$,
όπου m βαθμωτό μέγεθος
4. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \ \ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$
5. Εάν $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, τότε
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$
$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$$
6. Εάν $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ και $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ μη μηδενικά διανύσματα, τότε τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

1.2.2 Το εξωτερικό γινόμενο

Το *εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο* (cross product) δύο διανυσμάτων $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι ένα διάνυσμα $\mathbf{C}$ το οποίο έχει μέτρο το γινόμενο των μέτρων των $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ και του ημιτόνου της μεταξύ των γωνίας ϑ, και διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ εις τρόπον ώστε τα $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$ να σχηματίζουν ένα δεξιόστροφο σύστημα. Ισχύει ο ακόλουθος συμβολισμός

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathrm{AB}\sin\vartheta\mathbf{u}, \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \tag{1.5}$$

όπου $\mathbf{u}$ μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του $\mathbf{C}$.

Εάν $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ή $\mathbf{A}$ παράλληλο προς το $\mathbf{B}$, τότε $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$, επειδή $\sin\vartheta = 0$.

Για το εξωτερικό γινόμενο ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα
2. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ Επιμεριστική ιδιότητα
3. $m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})m$,
όπου m βαθμωτό μέγεθος
4. $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
5. Εάν $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, τότε

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

6. Το μέτρο του $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ είναι ίσο με το εμβαδό του παραλληλογράμμου με πλευρές $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$.

7. Εάν $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$ και $\mathbf{A},\mathbf{B}$ μη μηδενικά διανύσματα, τότε τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι παράλληλα μεταξύ τους.

1.2.3 Τριπλά γινόμενα

Ο εσωτερικός και εξωτερικός πολλαπλασιασμός τριών διανυσμάτων $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ σχηματίζουν αξιοσημείωτα *τριπλά γινόμενα* (triple products) του τύπου $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$, $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$, το οποίο καλείται *μικτό γινόμενο* και συμβολίζεται $[\mathbf{ABC}]$ και $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$, το οποίο καλείται *δισεξωτερικό γινόμενο.* Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}\neq\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$

2. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\neq(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ Δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα

3. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$
$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}$

4. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=$ με τον όγκο παραλληλεπιπέδου, το οποίο έχει ακμές τα $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$, εφόσον αυτά σχηματίζουν δεξιόστροφο σύστημα, ή τον αντίστοιχο αρνητικό όγκο, εφόσον τα $\mathbf{A},\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ σχηματίζουν αριστερόστροφο σύστημα.

5. Εάν $\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{C}=C_1\mathbf{i}+C_2\mathbf{j}+C_3\mathbf{k}$, τότε

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

1.2.4 Αντίστροφα σύνολα διανυσμάτων

Τα σύνολα των διανυσμάτων $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ και $\mathbf{a}',\mathbf{b}',\mathbf{c}'$ καλούνται *αντίστροφα σύνολα* ή *συστήματα διανυσμάτων* (reciprocal sets), εάν

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}'=\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}'=\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}'=1,$$

$$\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}'\cdot\mathbf{c}=\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}=\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a}=\mathbf{c}'\cdot\mathbf{b}=0.$$

Τα σύνολα $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ και $\mathbf{a}',\mathbf{b}',\mathbf{c}'$ είναι αντίστροφα, εάν και μόνον εάν

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \tag{1.8}$$

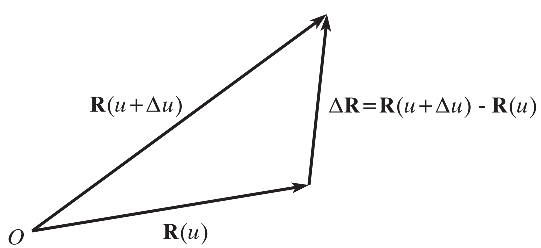
όπου $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq 0$.

1.3 Διαφορικός διανυσματικός λογισμός

1.3.1 Παράγωγος διανύσματος

Έστω $\mathbf{R}(u)$ διάνυσμα, συνάρτηση μιας μεταβλητής u, όπου u βαθμωτό μέγεθος και Δu μια μεταβολή του u. Τότε ισχύει η σχέση (βλ. Σχήμα 1.8)

$$\frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta u} = \frac{\mathbf{R}(u + \Delta u) - \mathbf{R}(u)}{\Delta u}.$$



Σχήμα 1.8: Παράγωγος διανύσματος

Η παράγωγος του διανύσματος $\mathbf{R}(u)$ ως προς u ορίζεται από τη σχέση

$$\frac{d\mathbf{R}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{R}(u + \Delta u) - \mathbf{R}(u)}{\Delta u},$$

εφόσον υπάρχει το όριο αυτό.

Το διάνυσμα $d\mathbf{R}/du$ είναι συνάρτηση του u, οπότε μπορεί να οριστεί η παράγωγός του ως προς u. Εάν η παράγωγος αυτή υπάρχει, συμβολίζεται ως $d^2\mathbf{R}/du^2$. Όμοια, συμβολίζονται οι παράγωγοι ανώτερης τάξης.

1.3.2 Καμπύλες του χώρου

Εάν το διάνυσμα $\mathbf{R}(u)$ είναι το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(u)$ του τυχόντος σημείου (x, y, z) ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο O, τότε

$$\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}.$$

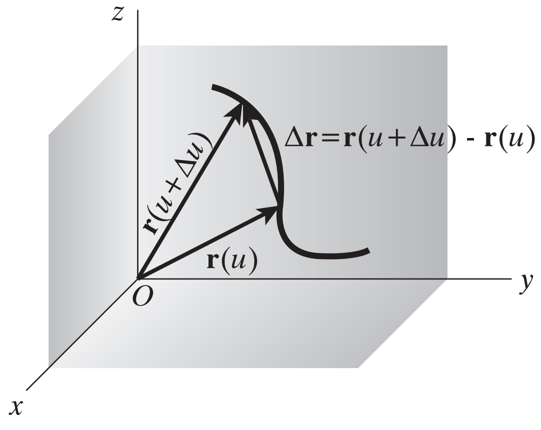
Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, τα (x, y, z) είναι συναρτήσεις του u. Καθώς το u μεταβάλλεται, το πέρας του $\mathbf{r}$ διαγράφει μια καμπύλη στο χώρο, η οποία έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = x(u), \qquad y = y(u), \qquad z = z(u).$$

Τότε

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta u} = \frac{\mathbf{r}(u+\Delta u) - \mathbf{r}(u)}{\Delta u}$$

είναι ένα διάνυσμα στη διεύθυνση του Δr (βλ. Σχήμα 1.9).



Σχήμα 1.9: Καμπύλη στο χώρο

Εάν το

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta u} = \frac{d\mathbf{r}}{du}$$

υπάρχει, το όριο αυτό θα είναι ένα διάνυσμα στη διεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης του χώρου στο σημείο (x, y, z), το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}.$$

Εάν το u είναι ο χρόνος t, $d\mathbf{r}/dt$ παριστάνει την *ταχύτητα* $\mathbf{v}$ με την οποία το πέρας του $\mathbf{r}$ διαγράφει την καμπύλη. Όμοια, η $d^2\mathbf{r}/dt^2 = d\mathbf{v}/dt$ παριστάνει την επιτάχυνση $\mathbf{a}$ κατά μήκος της καμπύλης.

1.3.3 Συνέχεια

Μια βαθμωτή συνάρτηση $\phi(u)$ καλείται *συνεχής* στο u, εάν

$$\lim_{\Delta u\to 0}\phi(u+\Delta u) = \phi(u).$$

Ισοδύναμα, $\phi(u)$ είναι συνεχής στο u, εάν για κάθε θετικό αριθμό ϵ υπάρχει θετικός αριθμός δ, τέτοιος ώστε

$$|\phi(u+\Delta u) - \phi(u)| < \epsilon \quad \text{για οποιοδήποτε} \quad |\Delta u| < \delta.$$

Μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{R}(u) = R_1(u)\mathbf{i} + R_2(u)\mathbf{j} + R_3(u)\mathbf{k}$ είναι *συνεχής* στο u, εάν οι τρεις βαθμωτές συναρτήσεις $R_1(u), R_2(u), R_3(u)$ είναι συνεχείς στο u ή εάν

$$\lim_{\Delta u \to 0} \mathbf{R}(u + \Delta u) = \mathbf{R}(u)$$

ή ισοδύναμα εάν

$$|\mathbf{R}(u + \Delta u) - \mathbf{R}(u)| < \epsilon \quad \text{για οποιοδήποτε} \quad |\Delta u| < \delta.$$

Μια βαθμωτή ή διανυσματική συνάρτηση της μεταβλητής u είναι *παραγωγίσιμη* n *φορές*, εάν υπάρχει η παράγωγός της n βαθμού. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι απαραίτητα συνεχής, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλ. μια συνεχής συνάρτηση δεν είναι κατ΄ ανάγκην παραγωγίσιμη.

1.3.4 Κανόνες παραγώγισης

Εάν $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ είναι παραγωγίσιμες διανυσματικές συναρτήσεις της μεταβλητής u και ϕ είναι μια παραγωγίσιμη βαθμωτή συνάρτηση της u, τότε

1. $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \dfrac{d\mathbf{A}}{du} + \dfrac{d\mathbf{B}}{du}$
2. $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B}$
3. $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du} \times \mathbf{B}$
4. $\dfrac{d}{du}(\phi \mathbf{A}) = \phi \dfrac{d\mathbf{A}}{du} + \dfrac{d\phi}{du}\mathbf{A}$
5. $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \dfrac{d\mathbf{C}}{du} + \mathbf{A} \cdot \dfrac{d\mathbf{B}}{du} \times \mathbf{C} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$
6. $\dfrac{d}{du}\{\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\} = \mathbf{A} \times \left(\mathbf{B} \times \dfrac{d\mathbf{C}}{du}\right) + \mathbf{A} \times \left(\dfrac{d\mathbf{B}}{du} \times \mathbf{C}\right) + \dfrac{d\mathbf{A}}{du} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

1.3.5 Μερικές παράγωγοι διανύσματος

Έστω $\mathbf{A}$ διάνυσμα το οποίο εξαρτάται από περισσότερες της μιας μεταβλητές, π.χ. x, y, z, δηλ. $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$. Η *μερική παράγωγος* (partial derivative) του A ως προς x ορίζεται ως

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{A}(x + \Delta x, y, z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta x},$$

εφόσον το όριο υπάρχει. Όμοια

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\mathbf{A}(x, y + \Delta y, z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta y},$$
$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\mathbf{A}(x, y, z + \Delta z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta z}$$

είναι οι μερικές παράγωγοι του $\mathbf{A}$ ως προς y και z αντίστοιχα, εφόσον τα αντίστοιχα όρια υπάρχουν.

Οι παρατηρήσεις σχετικά με τη συνέχεια και την ύπαρξη παραγώγου, οι οποίες ισχύουν για συναρτήσεις μιας μεταβλητής, μπορούν να επεκταθούν σε συναρτήσεις δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών. Ως παράδειγμα, η συνάρτηση $\phi(x, y)$ είναι συνεχής στο (x, y), εάν

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \phi(x + \Delta x, y + \Delta y) = \phi(x, y)$$

ή εάν για κάθε θετικό αριθμό ϵ υπάρχει θετικός αριθμός δ, τέτοιος ώστε

$$|\phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \phi(x, y)| < \epsilon, \quad \text{για οποιαδήποτε} \, |\Delta x| < \delta \quad \text{και} \quad |\Delta y| < \delta.$$

Όμοιοι ορισμοί ισχύουν και για τις διανυσματικές συναρτήσεις.

Μια συνάρτηση δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών είναι *παραγωγίσιμη*, εάν έχει συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους.

Οι παράγωγοι ανώτερης τάξης ορίζονται με το συνήθη τρόπο. Ως παράδειγμα

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\right).$$

Εάν $\mathbf{A}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους τουλάχιστο δεύτερης τάξης, τότε

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial x}, \quad \text{δηλ. η σειρά της παραγώγισης δεν έχει σημασία.}$$

Οι κανόνες για τη μερική παραγώγιση των διανυσμάτων είναι όμοιοι με εκείνους των βαθμωτών μεγεθών. Ως παράδειγμα, αν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι συναρτήσεις των x, y, z, τότε

1. $$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cdot \mathbf{B}$$

2. $$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \times \mathbf{B}$$

3. $$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cdot \mathbf{B}\right\} \\ &= \mathbf{A} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial x} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

κ.λπ.

1.3.6 Διαφορικά διανύσματος

Για τη διαφόριση διανύσματος ακολουθούνται κανόνες όμοιοι με εκείνους του διαφορικού λογισμού, όπως φαίνεται στα ακόλουθα παραδείγματα

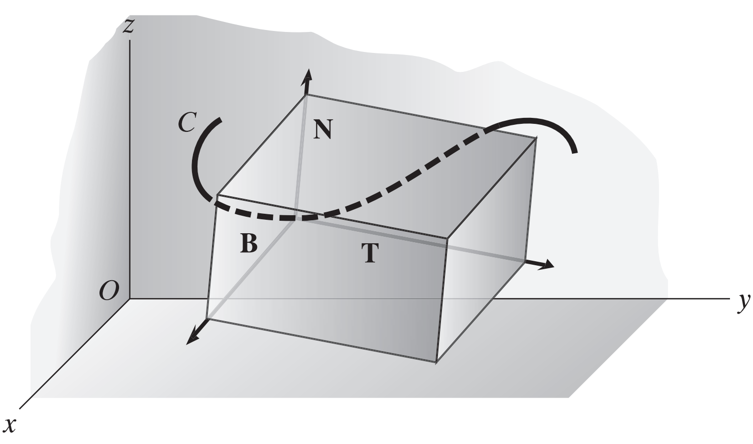
1. Εάν $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, τότε $d\mathbf{A} = dA_1\mathbf{i} + dA_2\mathbf{j} + dA_3\mathbf{k}$

2. $d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{B} + d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
3. $d(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times d\mathbf{B} + d\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
4. Εάν $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, τότε $d\mathbf{A} = \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}dy + \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}dz$

κ.λπ.

1.3.7 Διαφορική Γεωμετρία

Η *διαφορική γεωμετρία* μελετά καμπύλες του χώρου και επιφάνειες. Εάν C είναι μια καμπύλη του χώρου, η οποία ορίζεται από τη συνάρτηση $\mathbf{r}(u)$, τότε, όπως ήδη έχει αναφερθεί, $d\mathbf{r}/du$ είναι ένα διάνυσμα παράλληλο προς την εφαπτομένη της C στο u. Εάν στη θέση του βαθμωτού μεγέθους u θεωρηθεί το μήκος s μετρούμενο από ένα σταθερό σημείο της καμπύλης C, τότε $d\mathbf{r}/ds$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτόμενο στη C και συμβολίζεται με $\mathbf{T}$ (βλ. Σχήμα 1.10). Η ταχύτητα μεταβολής του $\mathbf{T}$ σε σχέση με το s είναι ένα μέτρο της καμπυλότητας της C και δίνεται από την $d\mathbf{T}/ds$. Η διεύθυνση του διανύσματος $d\mathbf{T}/ds$ σε κάθε σημείο της C είναι κάθετη στην καμπύλη στο σημείο αυτό. Εάν $\mathbf{N}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση αυτή, το διάνυσμα αυτό καλείται *πρώτη κάθετος* (principal normal) της καμπύλης. Τότε $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$. Το μέγεθος κ καλείται *καμπυλότητα* (curvature) της C στο συγκεκριμένο σημείο και το αντίστροφό του $\rho = 1/\kappa$ καλείται *ακτίνα καμπυλότητας* (radius of curvature).



Σχήμα 1.10: Διαφορική γεωμετρία

Ένα διάνυσμα $\mathbf{B}$ κάθετο στο επίπεδο των $\mathbf{T}$ και $\mathbf{N}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, καλείται *δευτέρα κάθετος* (binormal) της καμπύλης. Οι διευθύνσεις $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ σχηματίζουν ένα τοπικό δεξιόστροφο τρισορθογώνιο σύστημα αναφοράς σε κάθε σημείο της καμπύλης C, το οποίο καλείται *τρίεδρο* (trihedral). Καθώς το μήκος s μεταβάλλεται, το σύστημα συντεταγμένων κινείται κατά μήκος της καμπύλης και για το λόγο αυτό είναι γνωστό ως *συνοδεύον* ή *κινούμενο τρίεδρο* (moving trihedral).

Οι ακόλουθες σχέσεις οι οποίες περιέχουν παραγώγους των βασικών διανυσμάτων $\mathbf{T}, \mathbf{N}$ και $\mathbf{B}$ είναι γνωστές ως τύποι των Frenet-Serret:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}, \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N},$$

όπου τ είναι ένα βαθμωτό μέγεθος καλούμενο *στρέψη* (torsion), ενώ το αντίστροφο μέγεθος $\sigma = 1/\tau$ καλείται *ακτίνα στρέψης* (radius of torsion).

Χαρακτηριστικά επίπεδα της καμπύλης στο τυχόν σημείο P είναι το *εγγύτατο επίπεδο* (osculating plane), το οποίο περιέχει την εφαπτομένη και την πρώτη κάθετο στο P, τό *κάθετο επίπεδο* (normal plane), το οποίο είναι κάθετο στην εφαπτομένη της καμπύλης στο P και το *ευθειοποιούν επίπεδο* (rectifying plane), το οποίο είναι κάθετο στην πρώτη κάθετο της καμπύλης στο P.

Η διαφορική γεωμετρία βρίσκει εφαρμογή στην *Κινηματική* και στη *Δυναμική*, που είναι κλάδοι της *Μηχανικής*. Η κινηματική ασχολείται με την κίνηση μαζών κατά μήκος καμπύλων και η δυναμική με τη μελέτη των δυνάμεων οι οποίες ενεργούν στις κινούμενες μάζες. Θεμελιώδης νόμος της δυναμικής είναι ο νόμος του Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}),$$

όπου $\mathbf{F}$ η δύναμη, η οποία ενεργεί στη μάζα m, η οποία κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$. Το γινόμενο $m\mathbf{v}$ είναι η ορμή του σώματος. Εάν η μάζα είναι σταθερή, ο νόμος του Newton παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a},$$

όπου $\mathbf{a}$ η επιτάχυνση του σώματος.

Με τη μορφή αυτή, ο νόμος του Newton αποτελεί τη βάση για τη μελέτη του *πεδίου βαρύτητας*.

1.4 Κλίση, Απόκλιση και Περιστροφή

1.4.1 Ο τελεστής ∇

Ο *διανυσματικός διαφορικός τελεστής ανάδελτα* (nabla)[1] συμβολίζεται ∇ και ορίζεται ως ακολούθως

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.9}$$

[1] Ο όρος nabla οφείλεται στη φανταστική ομοιότητα του συμβόλου με την άρπα των Ασσυρίων. Ο ελληνικός όρος ανάδελτα οφείλεται στην ομοιότητα του συμβόλου με ανεστραμμένο κεφαλαίο δέλτα. Πολλοί συγγραφείς, όπως π.χ. ο Föppl στο έργο του Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Electricität, αποφεύγουν τη χρησιμοποίηση οποιουδήποτε όρου και αναφέρονται απλά στον τελεστή ∇.

Ο τελεστής αυτός έχει ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των διανυσμάτων.

Στη συνέχεια ορίζονται τρεις ποσότητες οι οποίες εμφανίζονται στις πρακτικές εφαρμογές και είναι γνωστές ως *κλίση*, *απόκλιση* και *περιστροφή*.

1.4.2 Η κλίση

Έστω ότι η συνάρτηση $\phi(x, y, z)$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο (x, y, z) μιας περιοχής του χώρου (δηλ. η ϕ ορίζει ένα παραγωγίσιμο βαθμωτό πεδίο). Τότε η *κλίση* (gradient) της ϕ, η οποία συμβολίζεται $\nabla\phi$ ή gradϕ, ορίζεται από τη σχέση

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{1.10}$$

Η κλίση $\nabla\phi$ της ϕ ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο. Η συνιστώσα της $\nabla\phi$ κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{a}$ καλείται η παράγωγος της ϕ κατά κατεύθυνση $\mathbf{a}$ (directional derivative) και παριστάνει το μέτρο της μεταβολής της ϕ στο σημείο (x, y, z) κατά τη διεύθυνση του $\mathbf{a}$.

Η κλίση $\nabla\phi$ όπως ορίζεται στην (1.10) φαίνεται ότι εξαρτάται από την εκλογή των αξόνων. Στη συνέχεια θα αποδειχτεί ότι το διάνυσμα $\nabla\phi$, όπου η βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x, y, x)$, είναι ανεξάρτητη από στροφές των αξόνων του συστήματος αναφοράς, παραμένει αμετάβλητο, αν το σύστημα αναφοράς περιστραφεί σε σχέση με την αρχή του[2] (rotation invariance).

Έστω ότι τα τρισορθογώνια συστήματα συντεταγμένων (xyz) και $(x'y'z')$ έχουν κοινή αρχή O και το ένα σύστημα έχει περιστραφεί γύρω από το O σε σχέση με το άλλο, δηλ. οι άξονες του ενός συστήματος σχηματίζουν γωνίες σε σχέση με τους άξονες του άλλου συστήματος. Ένα σημείο P έχει συντεταγμένες (x, y, z) σε σχέση με το πρώτο σύστημα και (x', y', z') σε σχέση με το δεύτερο σύστημα (Σχήμα 1.11). Μια βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x, y, z)$, όπως π.χ. η θερμοκρασία στο σημείο $P(x, y, z)$, είναι ανεξάρτητη από το σύστημα των συντεταγμένων, με την έννοια ότι αν $\phi'(x', y', z')$ είναι η θερμοκρασία στο P με συντεταγμένες (x', y', z'), τότε $\phi(x, y, z) = \phi'(x', y', z')$.

Αν στο σύστημα xyz η κλίση της ϕ είναι

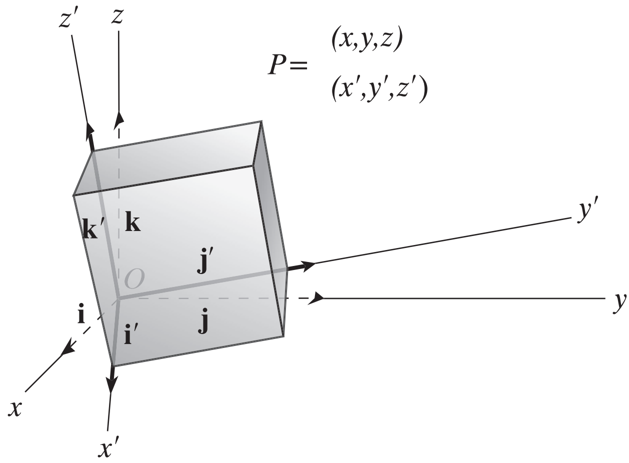
$$\nabla\phi \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

και στο σύστημα $x'y'z'$ είναι

$$\nabla'\phi' \equiv \frac{\partial\phi'}{\partial x'}\mathbf{i}' + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}\mathbf{j}' + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}\mathbf{k}',$$

θα δειχτεί ότι $\nabla\phi = \nabla'\phi'$.

[2]Ένας τέτοιος μετασχηματισμός καλείται *ορθογώνιος μετασχηματισμός* (orthogonal transformation) σε αντιδιαστολή με την περίπτωση κατά την οποία εκτός από τη στροφή συμβαίνει και μετατόπιση της αρχής του ενός συστήματος σε σχέση με το άλλο, οπότε ο μετασχηματισμός καλείται *αφφινικός μετασχηματισμός* (affine transformation).



Σχήμα 1.11: Μετασχηματισμός συντεταγμένων

Απόδειξη

Για την απόδειξη είναι απαραίτητο να βρεθούν οι τύποι μετασχηματισμού από το σύστημα xyz στο σύστημα $x'y'z'$.

Για κάθε διάνυσμα $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i}' + A_2\mathbf{j}' + A_3\mathbf{k}'$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}' &= A_1\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i}' + A_2\mathbf{j}'\cdot\mathbf{i}' + A_3\mathbf{k}'\cdot\mathbf{i}' = A_1\\
\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}' &= A_1\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j}' + A_2\mathbf{j}'\cdot\mathbf{j}' + A_3\mathbf{k}'\cdot\mathbf{j}' = A_2\\
\mathbf{A}\cdot\mathbf{k}' &= A_1\mathbf{i}'\cdot\mathbf{k}' + A_2\mathbf{j}'\cdot\mathbf{k}' + A_3\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}' = A_3,
\end{aligned}$$

δηλ.

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}'.$$

Θέτοντας στη θέση του $\mathbf{A}$ διαδοχικά τα $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= (\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' = l_{11}\mathbf{i}' + l_{21}\mathbf{j}' + l_{31}\mathbf{k}'\\
\mathbf{j} &= (\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' = l_{12}\mathbf{i}' + l_{22}\mathbf{j}' + l_{32}\mathbf{k}'\\
\mathbf{k} &= (\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' = l_{13}\mathbf{i}' + l_{23}\mathbf{j}' + l_{33}\mathbf{k}',
\end{aligned}$$

όπου $l_{ij}, i, j = 1, 2, 3$, τα συνημίτονα κατεύθυνσης των αξόνων x', y', z' σε σχέση με τους άξονες x, y, z, δηλ. $l_{11} = \cos(\mathbf{i}', \mathbf{i})$ κ.λπ.

Εφόσον τα δύο συστήματα έχουν κοινή αρχή, τα διανύσματα θέσης $\mathbf{r}$ και $\mathbf{r}'$ του τυχόντος σημείου P ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς θα είναι ίσα, δηλ. $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ ή

$$x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή τα $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ από τις προηγούμενες σχέσεις και εξισώνοντας τους συντελεστές των $\mathbf{i}',\mathbf{j}',\mathbf{k}'$ προκύπτουν οι τύποι μετασχηματισμού από το σύστημα xyz στο $x'y'z'$

$$\begin{aligned} x' &= l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z \\ y' &= l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z \\ z' &= l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z. \end{aligned}$$

Με εφαρμογή του κανόνα παραγώγισης σύνθετων συναρτήσεων προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'}l_{11} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'}l_{21} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'}l_{31} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'}l_{12} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'}l_{22} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'}l_{32} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'}l_{13} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'}l_{23} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'}l_{33}. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω σχέσεις επί $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ αντίστοιχα, προσθέτοντας κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} &= l_{11}\mathbf{i} + l_{12}\mathbf{j} + l_{13}\mathbf{k} \\ \mathbf{j}' &= (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} &= l_{21}\mathbf{i} + l_{22}\mathbf{j} + l_{23}\mathbf{k} \\ \mathbf{k}' &= (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} &= l_{31}\mathbf{i} + l_{32}\mathbf{j} + l_{33}\mathbf{k}, \end{aligned}$$

προκύπτει ότι $\nabla\phi = \nabla'\phi'$.

1.4.3 Η απόκλιση

Έστω $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}$ είναι ορισμένο και παραγωγίσιμο σε κάθε σημείο (x, y, z) μιας περιοχής του χώρου (δηλ. $\mathbf{V}$ ορίζει ένα παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο). Η *απόκλιση* (divergence) του $\mathbf{V}$ συμβολίζεται ως $\nabla \cdot \mathbf{V}$ ή div$\mathbf{V}$ και ορίζεται ως εξής

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}. \quad (1.11)$$

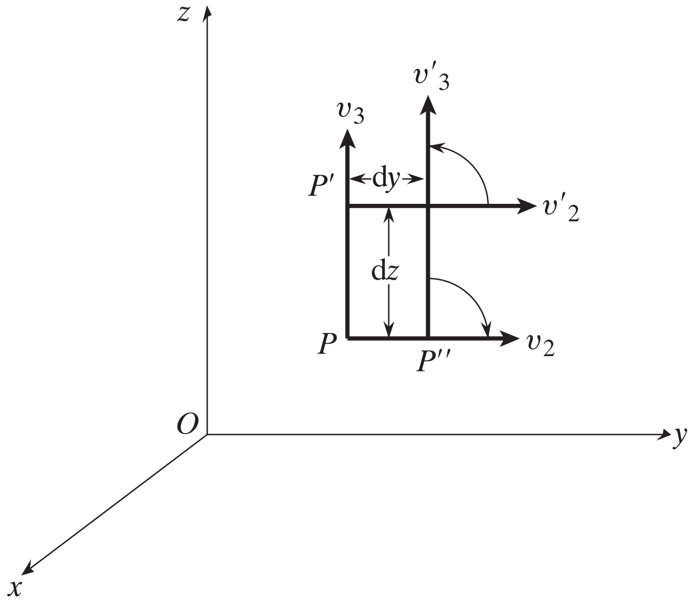
1.4.4 Η περιστροφή

Εάν $\mathbf{V}(x, y, z)$ είναι ένα παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο, τότε η *περιστροφή* (curl ή rotation) του $\mathbf{V}$ συμβολίζεται $\nabla \times \mathbf{V}$ και ορίζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \times (V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial z \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \quad (1.12) \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι στην ανάπτυξη των οριζουσών οι τελεστές $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ πρέπει να προηγούνται των συνιστωσών V_1, V_2, V_3.

Η φυσική σημασία της περιστροφής ενός διανύσματος φαίνεται ως εξής: Έστω ότι $\mathbf{v}$ είναι το διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού αναφερόμενο στο τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων x, y, z και ότι στο σημείο $P(x, y, z)$ οι συνιστώσες της $\mathbf{v}$ κατά τις διευθύνσεις των αξόνων Ox, Oy, Oz είναι v_1, v_2, v_3 αντίστοιχα (Σχήμα 1.12).



Σχήμα 1.12: Η φυσική σημασία της περιστροφής

Η συνιστώσα v_2' της ταχύτητας $\mathbf{v}$ στο σημείο $P'(x, y, z + dz)$ θα είναι κατά προσέγγιση

$$v_2' = v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial z} dz.$$

Άρα υπάρχει διαφορά ταχυτήτων της συνιστώσας της $\mathbf{v}$ κατά τη διεύθυνση του άξονα Oy στα σημεία $P(x, y, z)$ και $P'(x, y, z + dz)$ ίση προς

$$\left(v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial z} dz \right) - v_2 = \frac{\partial v_2}{\partial z} dz,$$

η οποία τείνει να περιστρέψει το ρευστό γύρω από τον άξονα Ox κατά φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, δηλ. αρνητική. Ως μέτρο ταχύτητας περιστροφής του ρευστού θεωρείται το μέγεθος $-\partial v_2/\partial z$. Όμως και η συνιστώσα v_3 της ταχύτητας $\mathbf{v}$ κατά τη διεύθυνση του άξονα Oz είναι δυνατόν να προκαλέσει περιστροφή του ρευστού κατά τον άξονα Ox. Πράγματι, η συνιστώσα της ταχύτητας στο σημείο $P''(x, y + dy, z)$ είναι ίση προς

$$v_3' = v_3 + \frac{\partial v_3}{\partial y} dy.$$

Άρα υπάρχει διαφορά ταχυτήτων στα σημεία $P(x, y, z)$ και $P''(x, y + dy, z)$, ίση προς

$$v_3 + \frac{\partial v_3}{\partial y} dy - v_3 = \frac{\partial v_3}{\partial y} dy$$

με μέτρο ταχύτητας περιστροφής το μέγεθος $\partial v_3 / \partial y$ και η οποία τείνει να περιστρέψει το ρευστό γύρω από τον άξονα Ox κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, δηλ. κατά τη θετική φορά.

Προφανώς η συνιστώσα v_1 της ταχύτητας $\mathbf{v}$ κατά τη διεύθυνση Ox δεν είναι δυνατό να περιστρέψει το ρευστό γύρω από τον άξονα Ox, άρα η ολική περιστροφή του ρευστού γύρω από τον άξονα Ox μετράται από την ποσότητα

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z},$$

η οποία είναι η συνιστώσα της περιστροφής $\nabla \times \mathbf{v}$ κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox. Εάν η συνιστώσα αυτή είναι ίση με μηδέν, τότε το ρευστό δεν περιστρέφεται (στροβιλίζεται) γύρω από τον άξονα Ox στο σημείο P. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται και οι άλλες συνιστώσες του διανύσματος $\nabla \times \mathbf{v}$.

Επομένως, το διάνυσμα $\nabla \times \mathbf{v}$ παριστάνει το βαθμό στροβιλισμού του $\mathbf{v}$. Εάν $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, τότε δεν παρατηρείται στροβιλισμός, δηλ. ένα στοιχειώδες μέρος του ρευστού δεν έχει γωνιακή ταχύτητα παρά μόνο μεταφορική. Το πεδίο τότε καλείται *αστρόβιλο* (non-vortical), ενώ στην αντίθετη περίπτωση καλείται *στροβιλό* (vortical) (βλ. και § 4.1.3).

1.4.5 Τύποι που περιέχουν τον τελεστή ∇

Εάν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι παραγωγίσιμες διανυσματικές συναρτήσεις και ϕ και ψ παραγωγίσιμες βαθμωτές συναρτήσεις της θέσης (x, y, z), τότε

1. $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$ ή $\mathrm{grad}(\phi + \psi) = \mathrm{grad}\phi + \mathrm{grad}\psi$
2. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$ ή $\mathrm{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathrm{div}\mathbf{A} + \mathrm{div}\mathbf{B}$
3. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$ ή $\mathrm{curl}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathrm{curl}\mathbf{A} + \mathrm{curl}\mathbf{B}$
4. $\nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{A} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$
5. $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$
6. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
7. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$
8. $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$

9. Η $\nabla \cdot (\nabla\phi) \equiv \nabla^2\phi \equiv \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$ καλείται *Λαπλασιανή* (Laplacian) της ϕ και ο $\nabla^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ καλείται τελεστής του Laplace (Laplacian operator)

10. $\nabla\times(\nabla\phi)=0$. Η περιστροφή της κλίσης της ϕ είναι μηδέν
11. $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$. Η απόκλιση της περιστροφής του $\mathbf{A}$ είναι μηδέν
12. $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$

Στους τύπους *9-12* οι συναρτήσεις ϕ και $\mathbf{A}$ υποτίθεται ότι έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης.

Αντί του συμβολισμού ∇^2 χρησιμοποιείται συνήθως ο συμβολισμός Δ (Del). Συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$\nabla^2\phi\equiv\Delta\phi\equiv\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\equiv 0 \tag{1.13}$$

καλούνται *αρμονικές συναρτήσεις* (harmonic functions).

1.4.6 Λαπλασιανά διανυσματικά πεδία

Ένα διάνυσμα $\mathbf{V}$ το οποίο είναι η κλίση ενός βαθμωτού μεγέθους ϕ και του οποίου η απόκλιση είναι ίση με μηδέν, δηλ.

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\nabla^2\phi=\Delta\phi=0,$$

καλείται Λαπλασιανό διανυσματικό πεδίο (Laplacian vector field).

Παράδειγμα Λαπλασιανού διανυσματικού πεδίου είναι το διανυσματικό πεδίο $-\mathbf{r}/r^3$. Πράγματι, όπως αποδεικνύεται στην εφαρμογή (1) της § 1.4.7, ισχύει

$$-\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\nabla\left(\frac{1}{r}\right),$$

δηλ. το $-\mathbf{r}/r^3$ προέρχεται από την κλίση ενός βαθμωτού μεγέθους και σύμφωνα με την εφαρμογή (4) της § 1.4.7,

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0,$$

δηλ. πληρούται και η δεύτερη συνθήκη.

1.4.7 Εφαρμογές

1. Να δειχτεί ότι

$$\nabla r^n=nr^{n-2}\mathbf{r}.$$

$$\begin{aligned}\nabla r^n &= \nabla\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n=\nabla\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n/2}\\ &= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n/2}\right]+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n/2}\right]\\ &\qquad +\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n/2}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{i}\left[\frac{n}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n/2-1}2x\right]+\mathbf{j}\left[\frac{n}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n/2-1}2y\right] \\
&\qquad +\mathbf{k}\left[\frac{n}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n/2-1}2z\right] \\
&= n\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n/2-1}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) \\
&= n\left(r^2\right)^{n/2-1}\mathbf{r}=nr^{n-2}\mathbf{r}
\end{aligned}$$

2. Να υπολογιστεί η κλίση της βαθμωτής συνάρτησης

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{1}{r}\right) &= \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right] \\
&+ \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right]+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right]
\end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right] &= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}2x=-\frac{x}{r^3} \\
\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right] &= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}2y=-\frac{y}{r^3} \\
\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right] &= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}2z=-\frac{z}{r^3},
\end{aligned}$$

οπότε

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-z\mathbf{k}}{r^3}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

3. Να αποδειχτεί ότι $\nabla(\phi+\psi)=\nabla\phi+\nabla\psi$.

$$\begin{aligned}
\nabla(\phi+\psi) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(\phi+\psi) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\phi+\psi)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}(\phi+\psi)\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}(\phi+\psi)\mathbf{k} \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{k} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi+\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\psi \\
&= \nabla\phi+\nabla\psi
\end{aligned}$$

4. Να δειχτεί ότι

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

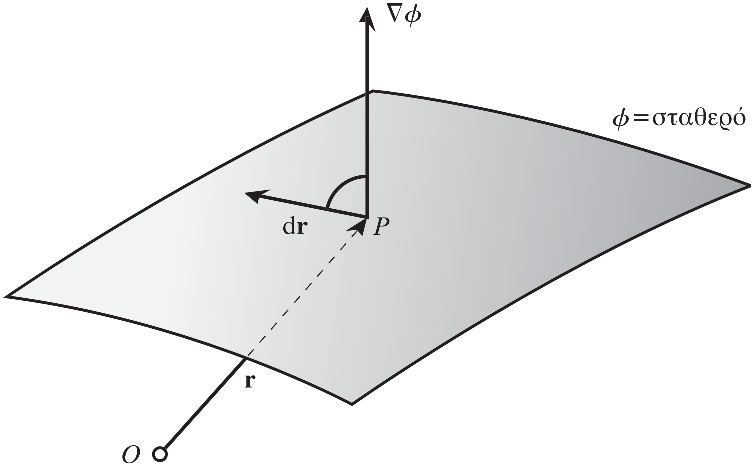
Σύμφωνα με τον τύπο *4* της § 1.4.5 για $\phi = r^{-3}$ και $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ προκύπτει

$$\nabla \cdot \left(r^{-3}\mathbf{r}\right) = \left(\nabla r^{-3}\right) \cdot \mathbf{r} + \left(r^{-3}\right) \nabla \cdot \mathbf{r} = -3r^{-5}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + 3r^{-3} = 0,$$

επειδή σύμφωνα με την εφαρμογή 1 είναι $\nabla r^{-3} = -3r^{-5}\mathbf{r}$.

5. Να δειχτεί ότι το διάνυσμα $\nabla\phi$ είναι κάθετο στην επιφάνεια $\phi(x, y, z) = c$, όπου c μία σταθερά.

Έστω $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ το διάνυσμα θέσης του τυχόντος σημείου $P(x, y, z)$ της επιφανείας $\phi(x, y, z) = c$. Τότε το διάνυσμα $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ κείται στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας ϕ, στο σημείο P (βλ. Σχήμα 1.13).



Σχήμα 1.13: Το διάνυσμα $\nabla\phi$

Αλλά

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0 \text{ ή}$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = 0,$$

δηλ. $\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = 0$, οπότε το $\nabla\phi$ είναι κάθετο στο $d\mathbf{r}$, άρα κάθετο στην επιφάνεια $\phi(x, y, z) = c$.

6. Να δειχτεί ότι η βαθμωτή συνάρτηση

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

πληροί την εξίσωση του Laplace

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Αλλά από την εφαρμογή (1)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^3} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y}{r^3} \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z}{r^3}$$

και με νέα παραγώγιση

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right] \\ &= (-x)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}2x - \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} \\ &= \frac{3x^2-r^2}{r^5}. \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο προκύπτουν και οι παράγωγοι δεύτερης τάξης ως προς y και z

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3y^2-r^2}{r^5}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3z^2-r^2}{r^5}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x, y, z προκύπτει

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3x^2-r^2+3y^2-r^2+3z^2-r^2}{r^5} = 0.$$

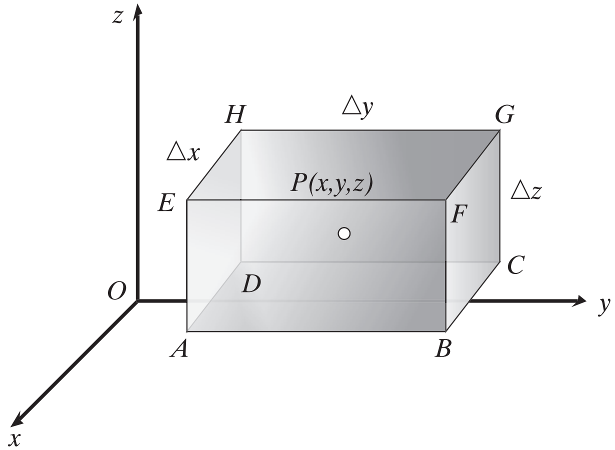
7. Να δειχτεί ότι αν η ταχύτητα ενός ρευστού σε κάθε σημείο (x, y, z) είναι $\mathbf{v}$, τότε το ρευστό που διαρρέει ανά μονάδα χρόνου και όγκου ένα παραλληλεπίπεδο με γεωμετρικό κέντρο στο σημείο $P(x, y, z)$ και ακμές $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, παράλληλες στους άξονες x, y, z αντίστοιχα, είναι ίσο με $\nabla \cdot \mathbf{v}$.

Έστω v_1 η συνιστώσα της ταχύτητας $\mathbf{v}$ κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox στο $P(x, y, z)$ (Σχήμα 1.14). Η συνιστώσα της $\mathbf{v}$ στο κέντρο των εδρών $DCGH$ και $ABFE$ υπολογίζεται ως εξής: Η παράλληλη προς τον άξονα Ox από το σημείο P τέμνει τις έδρες $DCGH$ και $ABFE$ του παραλληλεπιπέδου κάθετα στο γεωμετρικό τους κέντρο, δηλ. στα σημεία $(x - dx/2, y, z)$ και $(x + dx/2, y, z)$ αντίστοιχα. Η συνιστώσα της ταχύτητας του υγρού κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox στο κέντρο των εδρών $DCGH$ και $ABFE$ θα είναι τότε

$$v_1(x - \frac{dx}{2}, y, z) \quad \text{και} \quad v_1(x + \frac{dx}{2}, y, z) \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor και κρατώντας μόνον τους όρους πρώτης τάξης, η συνιστώσα της $\mathbf{v}$ κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox στο κέντρο των εδρών $DCGH$ και $ABFE$ θα είναι κατά προσέγγιση

$$v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \quad \text{και} \quad v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \quad \text{αντίστοιχα.}$$



Σχήμα 1.14: Στοιχειώδης όγκος $\Delta x \Delta y \Delta z$

Τότε ο όγκος του ρευστού που εισέρχεται στο παραλληλεπίπεδο από την έδρα $DCGH$ ανά μονάδα χρόνου θα είναι κατά προσέγγιση ίσος προς

$$\left(v_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z$$

και εκείνος που εξέρχεται από την έδρα $ABFE$ ανά μονάδα χρόνου θα είναι κατά προσέγγιση ίσος προς

$$\left(v_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z,$$

οπότε η συνολική ροή, δηλ. ο συνολικός όγκος προς τα έξω του ρευστού κατά τη διεύθυνση Ox ως διαφορά των δύο αυτών όγκων θα είναι ίσος προς

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z.$$

Όμοια, κατά τις διευθύνσεις Oy και Oz ο συνολικός όγκος θα είναι

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z \quad \text{και} \quad \frac{\partial v_1}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z,$$

αντίστοιχα. Τότε ο συνολικός όγκος του ρευστου ανά μονάδα χρόνου και όγκου που διαρρέει το παραλληλεπίπεδο προς τα έξω θα είναι ίσος προς

$$\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z\right]/\left(\Delta x\Delta y\Delta z\right)=\nabla\cdot\mathbf{v}.$$

Η πρόταση ισχύει ακριβώς όταν το παραλληλόγραμμο εκφυλίζεται στο σημείο P, δηλ. οι διαστάσεις των ακμών του παραλληλεπιπέδου $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ τείνουν στο μηδέν.

Εάν στο P συμβαίνει $\nabla\cdot\mathbf{v}>0$ ή $\nabla\cdot\mathbf{v}<0$, τότε στο P υπάρχει *πηγή* (source) ή *αρνητική πηγή* (sink) αντίστοιχα. Εάν το ρευστό θεωρηθεί ασυμπίεστο, τότε η συνολική ποσότητα ρευστού που εισέρχεται στο παραλληλεπίπεδο είναι ίση με εκείνη που εξέρχεται και επειδή το ρευστό δεν παράγεται ούτε καταστρέφεται σε κάθε σημείο, δεν υπάρχει πηγή ή αρνητική πηγή στο P, δηλ. $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$. Η εξίσωση αυτή καλείται *εξίσωση συνέχειας* (continuity equation) για ασυμπίεστο ρευστό και το διανυσματικό πεδίο στην περίπτωση αυτή καλείται *σωληνοειδές πεδίο* (solenoid field).

1.5 Ολοκληρωματικός διανυσματικός λογισμός

1.5.1 Ολοκληρώματα διανύσματος

Έστω $\mathbf{R}(u)=R_1(u)\mathbf{i}+R_2(u)\mathbf{j}+R_3(u)\mathbf{k}$ διάνυσμα, το οποίο εξαρτάται από τη μεταβλητή u και $R_1(u), R_2(u), R_3(u)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα ορισμένο διάστημα. Τότε

$$\int\mathbf{R}(u)du=\mathbf{i}\int R_1(u)du+\mathbf{j}\int R_2(u)du+\mathbf{k}\int R_3(u)du$$

καλείται *αόριστο ολοκλήρωμα* του $\mathbf{R}(u)$. Εάν υπάρχει διάνυσμα $\mathbf{S}(u)$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{R}(u)=\frac{d}{du}\left(\mathbf{S}(u)\right),$$

τότε

$$\int\mathbf{R}(u)du=\int\frac{d}{du}\left(\mathbf{S}(u)\right)du=\mathbf{S}(u)+\mathbf{c},$$

όπου $\mathbf{c}$ *αυθαίρετο σταθερό διάνυσμα*, ανεξάρτητο του u. Το αντίστοιχο *ορισμένο ολοκλήρωμα* μεταξύ των ορίων $u=a$ και $u=b$ γράφεται με ανάλογο τρόπο

$$\int_a^b\mathbf{R}(u)du=\int_a^b\frac{d}{du}\left(\mathbf{S}(u)\right)du=\mathbf{S}(u)+\mathbf{c}|_a^b=\mathbf{S}(b)-\mathbf{S}(a).$$

1.5.2 Γραμμικά ολοκληρώματα

Έστω $\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου (x, y, z) της καμπύλης C, η οποία ενώνει τα σημεία P_1 και P_2, όπου $u = u_1$ και $u = u_2$ αντίστοιχα. Υποτίθεται ότι η C αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό καμπύλων για κάθε μία από τις οποίες το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(u)$ έχει συνεχή παράγωγο. Έστω $\mathbf{A}(x, y, z) = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ μία διανυσματική συνάρτηση θέσης, ορισμένη και συνεχής κατά μήκος της καμπύλης C. Τότε το ολοκλήρωμα της εφαπτομενικής συνιστώσας του $\mathbf{A}$ κατά μήκος της C από το P_1 έως το P_2 δίνεται από την

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz,$$

η οποία είναι ένα παράδειγμα *γραμμικού ολοκληρώματος*. Εάν η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{A}$ παριστάνει τη δύναμη F η οποία ασκείται σε ένα σωματίδιο κινούμενο κατά μήκος της C, το γραμμικό ολοκλήρωμα παριστάνει το έργο που παράγεται από την F. Εάν υποτεθεί ότι η C είναι μία απλή κλειστή καμπύλη, δηλ. μια κλειστή καμπύλη, η οποία δεν έχει κανένα σημείο τομής με τον εαυτό της, το ολοκλήρωμα γύρω από τη C παριστάνεται ως

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz.$$

Γενικά, κάθε ολοκλήρωμα κατά μήκος καμπύλης καλείται γραμμικό ολοκλήρωμα.

Στην αεροδυναμική και στη μηχανική των ρευστών ένα τέτοιο ολοκλήρωμα καλείται *κυκλοφορία* (circulation) του $\mathbf{A}$ γύρω από τη C και παριστάνει την ταχύτητα ενός ρευστού.

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι σημαντικό.

Θεώρημα 1 *Εάν σε οποιαδήποτε περιοχή R του χώρου ορισμένη από τις σχέσεις $a_1 \leq x \leq a_2$, $b_1 \leq y \leq b_2$, $c_1 \leq z \leq c_2$ ισχύει $\mathbf{A} = \nabla\phi$, όπου $\phi(x, y, z)$ βαθμωτή συνάρτηση μονότιμα ορισμένη η οποία έχει συνεχείς παραγώγους στην R, τότε*

1. $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ *είναι ανεξάρτητο του δρόμου που ενώνει τα σημεία P_1 και P_2*
2. $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$ *κατά μήκος κάθε κλειστής καμπύλης C του R.*

Στην περίπτωση αυτή το $\mathbf{A}$ καλείται *συντηρητικό διανυσματικό πεδίο* (conservative vector field) και το ϕ είναι το (βαθμωτό) *δυναμικό* του $\mathbf{A}$, δηλ. ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{A}$ είναι συντηρητικό, εάν και μόνο εάν $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ή ισοδύναμα $\mathbf{A} = \nabla\phi$. Τότε το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = d\phi$ είναι ένα *ολικό ή τέλειο διαφορικό* (exact differential).

Απόδειξη της 1

Έστω ότι οι συντεταγμένες των σημείων P_1 και P_2 είναι (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2) αντίστοιχα. Τότε

$$\begin{aligned}
\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{P_1}^{P_2} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\
&= \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \\
&= \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \phi(P_2) - \phi(P_1) = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1),
\end{aligned}$$

δηλ. η τιμή του ολοκληρώματος εξαρτάται μόνον από τις συντεταγμένες των σημείων P_1 και P_2, άρα είναι ανεξάρτητη από το δρόμο που ενώνει τα σημεία αυτά, με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση ϕ είναι μονότιμα ορισμένη σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της.

Εάν το $\mathbf{A}$ είναι ένα πεδίο δυνάμεων, π.χ. το πεδίο των ελκτικών δυνάμεων που αναπτύσσονται μεταξύ των μαζών, το ολοκλήρωμα

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

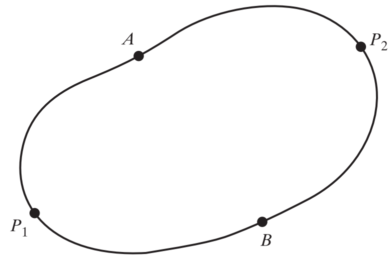
παριστάνει το *έργο* που παράγει η δύναμη $\mathbf{A}$ για να μετακινήσει τη μονάδα της μάζας από το σημείο P_1 στο σημείο P_2.

Απόδειξη της 2

Έστω ότι $P_1AP_2BP_1$ είναι μια κλειστή καμπύλη (βλ. Σχήμα 1.15).

Με την προϋπόθεση ότι ισχύει το σκέλος (*1*) του Θεωρήματος,

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{P_1AP_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0.
\end{aligned}$$



Σχήμα 1.15: Κλειστή καμπύλη $P_1AP_2BP_1$

1.5.3 Εφαρμογές

1. Δίνεται η επιτάχυνση ενός κινητού $\mathbf{b}(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\mathbf{j} + \ddot{z}(t)\mathbf{k}$. Ζητούνται η ταχύτητα $\mathbf{v}(t)$ και η θέση $\mathbf{r}(t)$ του κινητού για τις αρχικές συνθήκες $\mathbf{v}_{t=\circ} = \mathbf{v}_\circ$ και $\mathbf{r}_{t=\circ} = \mathbf{r}_\circ$.

Η ταχύτητα του κινητού κατά τη χρονική στιγμή t προκύπτει με ολοκλήρωση της $\mathbf{b}(t) = d\mathbf{v}(t)/dt$ ως προς το χρόνο

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{b}(t)dt + \mathbf{c}_1,$$

όπου $\mathbf{c}_1$ προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη $\mathbf{v}_{t=\circ} = \mathbf{v}_\circ$.

Η θέση του κινητού κατά τη χρονική στιγμή t προκύπτει με ολοκλήρωση της $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$ ως προς το χρόνο

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{v}(t)dt + \mathbf{c}_2,$$

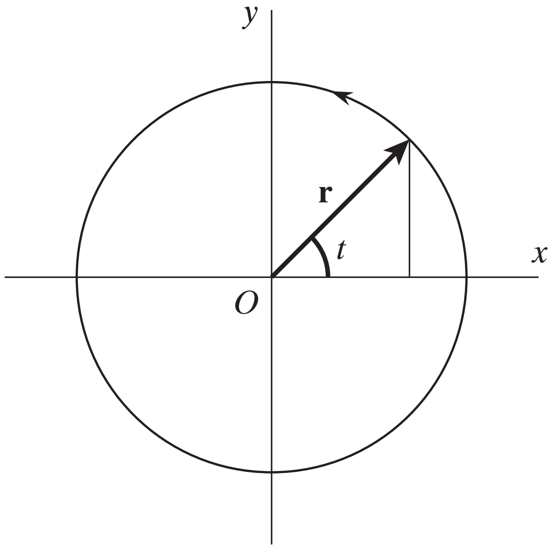
όπου $\mathbf{c}_2$ προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη $\mathbf{r}_{t=\circ} = \mathbf{r}_\circ$.

2. Ζητείται να υπολογιστεί το έργο που παράγει η δύναμη $\mathbf{F} = (2x - y + 3z^2)\mathbf{i} + (x + y - 5z)\mathbf{j} + (3x - 2y + 4z^2)\mathbf{k}$, η οποία αναγκάζει σωματίδιο να εκτελέσει μια περιστροφή κατά μήκος κύκλου C του επιπέδου xy, με κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και ακτίνα 3 μονάδων.

Στο επίπεδο xy η δύναμη έχει εξίσωση $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}$, επειδή $z = 0$. Το έργο της υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C [(2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}]\cdot[dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}] \\ &= \int_C (2x - y)dx + (x + y)dy.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $x = 3\cos t, y = 3\sin t, 0 \le t \le 2\pi$ (βλ. Σχήμα 1.16) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $dx = -3\sin t dt$, $dy = 3\cos t dt$, το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται



Σχήμα 1.16: Έργο δύναμης κατά μήκος περιφέρειας

$$\int_{t=0}^{2\pi} (6\cos t \ - \ 3\sin t)(-3\sin t)dt + (3\cos t + 3\sin t) \ 3\cos t dt$$

$$= \int_{0}^{2\pi} (9 - 9\sin t\cos t)dt = 9t - \frac{9}{2}\sin^2 t\Big|_{0}^{2\pi} = 18\pi.$$

Στην πραπάνω λύση υποτίθεται ότι η καμπύλη C διαγράφεται κατά τη θετική φορά, η οποία συμπίπτει με την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού. Εάν η C διαγράφεται κατά την αρνητική φορά, το αποτέλεσμα θα είναι -18π.

3. Εάν $\mathbf{F}$ είναι ένα συντηρητικό πεδίο, να δειχτεί ότι curl $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ και αντιστρόφως, εάν $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό.

Απόδειξη

Έστω $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$. Επειδή το $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό πεδίο, το $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

είναι ανεξάρτητο του δρόμου C, ο οποίος έστω ενώνει τα σημεία (x_1, y_1, z_1) και (x, y, z). Τότε

$$\phi(x,y,z) = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} F_1dx + F_2dy + F_3dz$$