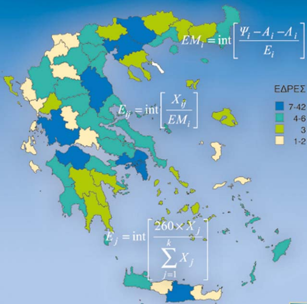
ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΧΑΤΖΗΠΑΝΤΕΛΗΣ
Καθηγητής Α.Π.Θ.

ΓΙΑΝΝΗΣ ΑΝΔΡΕΑΔΗΣ
Διδάκτορας Α.Π.Θ.

Μαθηματικά στις ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ISBN 960-431-958-2

Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (5 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό σχεδιάστηκε ώστε να ελαχιστοποιήσει τις απαιτήσεις μαθηματικών γνώσεων πριν την ανάγνωση του και τη μελέτη του από τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη. Διαπραγματεύεται θέματα από το σύνολο των μαθηματικών γνώσεων που οι συγγραφείς του πιστεύουν ότι δίνουν μια γεύση στον ενδιαφερόμενο για τις δυνατότητες χρήσης μαθηματικών τεχνικών και μεθόδων στις πολιτικές επιστήμες.

Τα μαθηματικά προσπαθούν να απεικονίσουν την πραγματικότητα με μια συμβολική γλώσσα και να δώσουν τη δυνατότητα να διαμορφωθούν αφηρημένα πρότυπα από συγκεκριμένα προβλήματα. Σε αυτή την προσπάθεια χρησιμοποιούν δομές και τεχνικές. Στο βιβλίο αυτό παρουσιάζονται μαθηματικές δομές όπως «το σύνολο» και «το γράφημα» που είναι οι απλούστερες μαθηματικές δομές, δομές δηλαδή με τις ελάχιστες προϋποθέσεις και απαιτήσεις.

Οτιδήποτε, οποιαδήποτε **συλλογή** αντικειμένων ή υποκειμένων μπορεί να αποτελέσει ένα σύνολο. Αρκεί να υπάρχει κάτι, κάποια ιδιότητα που τα συνδέει. Κράτη που έχουν ένα κοινό συνδετικό στοιχείο, όπως οι 25 χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης, αποτελούν ένα σύνολο. Οι πενήντα έξι εκλογικές περιφέρειες της Ελλάδας αποτελούν ένα σύνολο, οι δεκατρείς διοικητικές περιφέρειες, οι χίλιοι τριάντα τρεις Ο.Τ.Α, οι φοιτητές του τμήματος Πολιτικών Επιστημών, τα μέλη της Ν.Δ., οι τριακόσιοι βουλευτές. Σε κάθε περίπτωση από τις παραπάνω μαζί με το σύνολο υπάρχει ο συνδετικός κρίκος όλων τους, η κοινή ιδιότητα τους.

Τα σύνολα συνδέονται μεταξύ τους μέσω **συναρτήσεων**. Σχέσεων δηλαδή των στοιχείων τους. Μαθαίνουμε να περιγράφουμε συναρτήσεις μεταξύ συνόλων. Συνήθως η συνάρτηση αναφέρεται σε ένα σύνολο ορισμού και σε ένα σύνολο τιμών. Μετράει πόσο **κοστίζει** για το κάθε στοιχείο του συνόλου ορισμού η σχέση των δύο συνόλων.

Το **γράφημα** απεικονίζει την απλούστερη σχέση **μέσα σε ένα σύνολο**. Τα στοιχεία του συνδέονται ή δεν συνδέονται ανά δύο μεταξύ τους ως προς κάποια απλή σχέση. Στο σύνολο των πενήντα έξι εκλογικών περιφερειών, οι συνδέσεις μπορεί να αναφέρονται στην ύπαρξη κοινού συνόρου μεταξύ των περιφερειών, στο σύνολο των φοιτητών μπορεί να αναφέρονται στο αν γνωρίζονται μεταξύ τους, στους βουλευτές αν προέρχονται από το ίδιο κόμμα ή την ίδια περιφέρεια. Σε κάθε γράφημα, η επισήμανση και η χρήση της σχέσης που ορίζεται από αυτό είναι σημαντική. Τεχνικές στα γραφήματα και απλά προβλήματα οδηγούν σε ιδιαίτερα χρήσιμες εφαρμογές και γενικεύσιμες λύσεις.

Από τις πρώτες μέρες πολιτισμού στον πλανήτη γη προέκυψε η ανάγκη «της απαρίθμησης». Οι πρώτοι άνθρωποι χρησιμοποιούσαν τα δάκτυλα των χεριών τους (κάτι που κάνουν και τα μικρά παιδιά) για «να μετρήσουν», να αντιστοιχίσουν δηλαδή σύνολα αριθμών σε στοιχεία συνόλων. Στο βιβλίο αυτό διαπραγματευόμαστε τις τεχνικές για να μετράμε, να απαριθμούμε ακολουθώντας τα βήματα των πρώτων ανθρώπων. **Συνδυάζουμε**, για να βρούμε, πόσες διαφορετικές τριάδες μπορούν να σχηματιστούν από ένα σύνολο δεκαπέντε ατόμων, **μεταθέτουμε** για να δούμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τους βάλουμε να κάτσουν στο ίδιο τραπέζι, **διατάσσουμε** για να δούμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να βάλουμε τέσσερις από αυτούς στη σειρά. Και όχι μόνο αυτό. Πόσες διαφορετικές λύσεις μπορεί να προκύψουν σε ένα σύνθετο πρόβλημα διαπραγμάτευσης; Πόσες διαφορετικές στρατηγικές μπορεί να χρησιμοποιηθούν; Πόσα είναι τα διαφορετικά προγράμματα εξετάσεων σε μια εξεταστική περίοδο; Σκόπιμα δεν ενδιαφερόμαστε στο πλαίσιο αυτού του βιβλίου με την επιλογή **του καλύτερου από τους διαφορετικούς τρόπους.** Αυτό αποτελεί αντικείμενο άλλων τεχνικών και διαδικασιών στην βάση **κριτηρίων και υποθέσεων.**

Η πιθανότητα είναι μια έννοια που εισέρχεται στην καθημερινή μας ζωή. Σχεδόν το σύνολο των προβλημάτων που αντιμετωπίζουμε κυριαρχείται από ενδεχόμενα, γεγονότα, αβεβαιότητες. Βέβαια είναι ελάχιστα. Φυσικά και κοινωνικά φαινόμενα έχουν αβέβαια εξέλιξη, πλήθος εναλλακτικών λύσεων, που κάθε μια πρέπει να μετρηθεί, να υπολογιστεί **πόσο πιθανό είναι να συμβεί**. Στο βιβλίο αυτό διαπραγματευόμαστε τις τεχνικές για να υπολογίζουμε, να μετράμε την πιθανότητα κάθε εναλλακτικής λύσης **εκ των προτέρων** βασιζόμενοι στην ανάλυση του φαινομένου που μελετάμε χωρίς να πειραματιζόμαστε ή να παρακολουθούμε. Στοχαζόμαστε, και από αυτή την ελληνική λέξη προκύπτει η περιγραφή **στοχαστικό** για πλήθος φαινομένων και διαδικασιών. Προϋποθέτουμε ότι αυτός που μελετά, γνωρίζει το φαινόμενο, μπορεί να το αναλύσει σε βάθος, να εξετάσει τις πλευρές του και τις εξελίξεις του. Τα πειράματα και οι αποφάσεις είναι φυσικά μια άλλη, μεγάλη και γοητευτική ιστορία!

Συνθήκες και δεδομένα υπάρχουν πολλές στην καθημερινότητα μας. Η φράση «τι θα συνέβαινε αν …» είναι μια φράση που πολλές φορές σκεφτόμαστε και επαναλαμβάνουμε. Ποια είναι η πιθανότητα ένας αθώος να κατέχει κάποια υλικά ή να βρέθηκε σε κάποιο σημείο; Ποια είναι η πιθανότητα ένας που βρέθηκε σε κάποιο σημείο ή κατέχει κάποια υλικά να είναι αθώος; **Είναι δυο διαφορετικά πράγματα, δυο διαφορετικές καταστάσεις που δεν πρέπει ποτέ να συγχέονται.** Μαθαίνουμε να μετράμε, να υπολογίζουμε **υπό τις δεδομένες συνθήκες** διαφορετικές πιθανότητες. Φυσικά, οι αποφάσεις με βάση τους υπολογισμούς είναι μια άλλη υπόθεση!

Και φυσικά

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ Η ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ,
ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΥΝ, ΕΡΜΗΝΕΥΟΥΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΟΥΝ
ΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ.

Περιεχόμενα

Επεξηγήσεις των συμβολισμών του εξώφυλλου:

int[A]	ακέραιο μέρος του αριθμού A
E_j	αριθμός εδρών του *j* σχηματισμού
X_j	αριθμός ψήφων του *j* σχηματισμού
EM_i	εκλογικό μέτρο της εκλογικής περιφέρειας *i*
Ψ_i	ψηφίσαντες στην εκλογική περιφέρεια *i*
A_i	άκυρα στην εκλογική περιφέρεια *i*
Λ_i	λευκά στην εκλογική περιφέρεια *i*
E_i	έδρες της εκλογικής περιφέρειας *i*
E_{ij}	έδρες του *j* σχηματισμού στη *i* εκλογική περιφέρεια
X_{ij}	αριθμός ψηφοδελτίων του *j* σχηματισμού στη *i* εκλογική περιφέρεια

Εισαγωγή

Γιατί Μαθηματικά;

Μια μελέτη δείχνει (***στην Αμερική***) ότι το πιο σημαντικό μεμονωμένο κριτήριο με το οποίο διαλέγει μια γυναίκα τη σχολή που θα παρακολουθήσει μεταπτυχιακές σπουδές πολιτικών επιστημών, είναι το αν για την εισαγωγή της τα μαθηματικά ή η στατιστική είναι προαπαιτούμενο.

Ιδιαίτερα οι γυναίκες μπορεί να καταλήξουν σε χαμηλότερα αμειβόμενους κλάδους επειδή κάνουν ότι μπορούν για να αποφύγουν ένα μάθημα χημείας ή οικονομικών με προαπαιτούμενα μαθηματικών ή στατιστικής. Πολλές έξυπνες γυναίκες στρέφονται στην κοινωνιολογία και πολλοί μέτριοι άνδρες στις επιχειρήσεις όταν η μόνη διαφορά που υπήρχε μεταξύ τους ήταν ότι οι άνδρες είχαν καταφέρει με τα χίλια ζόρια να παρακολουθήσουν λίγα μαθηματικά στο πανεπιστήμιο.

Οι φοιτητές που σπουδάζουν μαθηματικά στο πανεπιστήμιο έχουν πολλές επαγγελματικές επιλογές όχι μόνο στα μαθηματικά ή στους υπολογιστές αλλά σε μια ολοένα μεγαλύτερη ποικιλία τομέων.

Μαθηματικό άγχος

Η Sheila Tobias περιγράφει «*Οι ίδιοι άνθρωποι που μπορούν να καταλάβουν τις πιο λεπτές συγκινησιακές αποχρώσεις σε μια συζήτηση, τις πιο μπερδεμένες πλοκές στη λογοτεχνία και τις πιο δαιδαλώδεις όψεις μιας νομικής υπόθεσης δεν φαίνεται να μπορούν να κατανοήσουν τα πιο βασικά στοιχεία μιας μαθηματικής απόδειξης*».

Αν δεχτούμε σχηματικά ότι οι πολιτικές επιστήμες μπορούν να περιγραφούν σαν επιστήμες που **παρατηρούν, περιγράφουν και αναλύουν τα πολιτικά φαινόμενα και τον πολιτικό ανταγωνισμό**, θα πρέπει να παραδεχτούμε ότι για την παρατήρηση, την περιγραφή και την ανάλυση πρέπει να χρησιμοποιήσουν επιστημονικές μεθόδους.

Επιστημονικές μέθοδοι και μεθοδολογικές προσεγγίσεις υπάρχουν πολλές και φυσικά δεν χρησιμοποιούν όλες μαθηματικά μοντέλα (*αναπαραστάσεις δηλαδή της πραγματικότητας με μαθηματικά σύμβολα*) ούτε μαθηματικές αποδείξεις (*συστήματα δηλαδή τεκμηρίωσης της αλήθειας ισχυρισμών βασισμένα σε σειρές συλλογισμών*). Τα Μαθηματικά δεν έχουν την ανάγκη να θεωρούν τον εαυτό τους μοναδική αλήθεια, μοναδική μέθοδο, μοναδική γλώσσα περιγραφής της πραγματικότητας. Διεκδικούν όμως την στερεότητα και την παγκοσμιότητα κοινού περιγραφικού εργαλείου και κοινού συμβολικού λόγου.

Τις τελευταίες δεκαετίες η πολυπλοκότητα των προβλημάτων οδηγεί στην ανάγκη να χρησιμοποιηθούν τεχνικές παρατήρησης, περιγραφής και ανάλυσης που στηρίζονται και χρησιμοποιούν μαθηματικούς συμβολισμούς και αποδείξεις. Όσο αλήθεια είναι ότι πρέπει κανείς να προσπαθήσει για να εξοικειωθεί με τη συμβολική γλώσσα, τόσο αλήθεια είναι ότι η απλότητα και η εσωτερική συνέπεια της συμβολικής γλώσσας δικαιώνει τον χρήστη που καταλήγει σε επιστημονικά συμπεράσματα, **συμπεράσματα δηλαδή στα οποία καταλήγει όποιος χρησιμοποιεί στα ίδια «δεδομένα» τις ίδιες μεθόδους.**

Εκλογικά συστήματα, διαιρέσεις σε διοικητικές ή εκλογικές ενότητες, περιγραφή των διεθνών σχέσεων, κριτήρια σύγκλισης και προσεγγίσεις χωρών, σχηματισμός επιτροπών, δημόσια και διεθνή οικονομικά, ανταγωνισμοί και οργανωτικά κομμάτων, στρατηγικές και καμπάνιες και άλλα πολλά, ευκολότερα θα μπορούσαν να περιγραφούν και να αναλυθούν με τα **μαθηματικά**.

Συνδυαστική

Η **συνδυαστική** ως διακριτός κλάδος των Μαθηματικών έλκει την καταγωγή της, όπως άλλωστε και πολλοί άλλοι κλάδοι, από την εποχή της απασχόλησης των ανθρώπων με τις “μυστηριακές” ιδιότητες των αριθμών. Ο μύθος θέλει τον Κινέζο αυτοκράτορα Yu να παρατηρεί στη πλάτη μιας γιγαντιαίας θαλάσσιας χελώνας το 2200 π.χ. το παρακάτω σχήμα που αντιστοιχεί σε **μαγικό τετράγωνο**[1].

1 Μαγικό τετράγωνο: Ένας πίνακας διαστάσεων N×N (N γραμμές και N στήλες) που το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης και κάθε κύριας διαγωνίου είναι ο ίδιος αριθμός

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Στην ιστορική της διαδρομή η περιοχή αυτή των Μαθηματικών συναντήθηκε με τις ιδιότητες των αριθμών, με παιχνίδια και πνευματικά γυμνάσματα, διαπέρασε τις πρακτικές εφαρμογές και κατέληξε να θεωρείται σήμερα το κομμάτι εκείνο των Μαθηματικών που περιγράφει τις εφαρμογές των βασικών αρχών των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή.

Οι συνδυασμοί

Οι "συνδυασμοί" (ο αριθμός των υποσυνόλων με πληθικό αριθμό k από ένα σύνολο μεγέθους N) ήταν γνωστοί στην Κίνα από το 1100 π.Χ., ενώ το πρώτο αποτέλεσμα που καταγράφεται στην περιοχή της συνδυαστικής είναι ο υπολογισμός του αριθμού των "συνδυασμών" $\boldsymbol{C(n, k)}$ από τον χαλίφη Rabbi Ben Ezra το 1140 μ.Χ. Στην συνέχεια η διατύπωση των προβλημάτων της καθημερινότητας με αφηρημένη γλώσσα, **η ανάγκη δηλαδή κατασκευής μοντέλων για την παράσταση και την λύση προβλημάτων**, οδήγησε στην διατύπωση της θεωρίας της "Συνδυαστικής" ή τα "Συνδυαστικά Μαθηματικά" που γενικά μελετούν συναρτήσεις που ορίζονται σε σύνολα πεπερασμένου πλήθους (π.χ. ένα κομμάτι των θετικών ακέραιων). Παράλληλα, η αναζήτηση μεθόδων για την περιγραφή των διαδικασιών λύσης των προβλημάτων και η ανάπτυξη των υπολογιστικών μηχανών συναντήθηκαν στην κατασκευή "αλγορίθμων", σειράς δηλαδή εντολών, οι οποίες πραγματοποιούμενες οδηγούν στην απάντηση στο πρόβλημα το οποίο αντιμετωπίζουμε.

Η Συνδυαστική με την κατασκευή και την μελέτη δομών αναπαράστασης (μοντέλων) και αλγορίθμων, τυποποιεί την αναζήτηση απάντησης σε τρεις μεγάλες κατηγορίες προβλημάτων:

προβλήματα ύπαρξης (λύσης)

Σε κάποιο πρόβλημα που τίθεται αναζητούμε την ύπαρξη ή όχι λύσης

προβλήματα μέτρησης (απαρίθμησης λύσεων)

Σε κάποιο πρόβλημα αναζητούμε τον αριθμό, το πλήθος των ενδεχόμενων (μη ισοδύναμων) λύσεων

προβλήματα αριστοποίησης (βελτιστοποίησης)

Σε κάποιο πρόβλημα αναζητούμε την βέλτιστη (την καλύτερη ως προς κάποια κριτήρια) από τις ενδεχόμενες λύσεις

Είναι φανερό, ότι η Συνδυαστική τέμνεται ως επιστημονική περιοχή με πολλές άλλες περιοχές των Μαθηματικών που αντιμετωπίζουν αντίστοιχα προβλήματα. Επισημαίνουμε ότι η Συνδυαστική ασχολείται κυρίως (σχεδόν αποκλειστικά) με προβλήματα σε διακριτά σύνολα. Έτσι, στην συνάντηση της αυτή, δανείζει και δανείζεται μεθόδους (όπως η μέθοδος Simplex και ο Ουγγρικός αλγόριθμος στον γραμμικό προγραμματισμό, τα λατινικά τετράγωνα και οι πειραματικοί σχεδιασμοί στην εφαρμοσμένη στατιστική) διατηρεί όμως την ιδιαίτερη ταυτότητα της με την παραγωγή θεωρητικών αποτελεσμάτων (**όπως στην θεωρία γραφημάτων**) ώστε να αναπτύσσεται αυτόνομα.

Όχι άδικα, η συνάντηση με τους αλγορίθμους και την θεωρία των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών οδηγεί στην διατύπωση ότι “**η Συνδυαστική (ως διακριτά μαθηματικά) είναι τα μαθηματικά της εποχής μας**.” Αν και ο συγγραφέας πιστεύει ότι όλες οι περιοχές των Μαθηματικών με τις εφαρμογές, την αλληλεπίδραση τους και την αυτόνομη πορεία τους συνεισφέρουν στην περιγραφή της αντικειμενικής πραγματικότητας και την αισθητοποίηση του περιβάλλοντος κόσμου, πιστεύει ότι η Συνδυαστική **κατέχει σημαντική θέση στην μεταφορά των αφηρημένων εννοιών από τον χώρο των ιδεών στον χώρο της εφαρμογής και στην απασχόληση με συγκεκριμένα προβλήματα**. Ουσιώδης είναι επίσης η συμβολή της Συνδυαστικής στην ανάπτυξη της “*μαθηματικής σκέψης*”, **της ικανότητας δηλαδή κατασκευής αφηρημένων τυπολογικών προτύπων γενίκευσης εμπειρικών ή θεωρητικών παρατηρήσεων.**

Τέλος, η Συνδυαστική είναι απαραίτητη ως γνώση στην κατανόηση της βάσης των αλγορίθμων που χρησιμοποιούμε στους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές και στην δημιουργία “*ευρετικών*”[2] αλγο-

2 Ένας αλγόριθμος (μια σειρά εντολών) που δεν αποσκοπεί στην εύρεση της καλύτερης από όλες τις πιθανές λύσεις αλλά σε μια «εφικτή» λύση, δηλαδή μια λύση που μπορεί να πραγματοποιηθεί. Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι και εφαρμόσιμοι σε σύνθετα προ-

ρίθμων για προβλήματα βελτιστοποίησης όπου είναι ιδιαίτερα δύσκολη, αν όχι αδύνατη, η κατασκευή ακριβούς αλγορίθμου λύσης.

Οι παραπάνω λόγοι συνηγορούν στο ότι η Συνδυαστική πρέπει να διατρέχει το αναλυτικό πρόγραμμα των βαθμίδων της εκπαίδευσης, αφού οι βασικοί στόχοι του αναλυτικού προγράμματος πρέπει να περιέχουν την **μοντελοποίηση**, την **ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης** και την **εξοικείωση με τους αλγορίθμους** των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών. Επιπρόσθετα η Συνδυαστική προσφέρεται λόγω της δυνατότητας διαφορετικού βαθμού προσέγγισης των εννοιών (με την ανάπτυξη εφαρμογών από την καθημερινή εμπειρία) σε κάθε επίπεδο (βαθμίδα), **για την ανάδειξη της συνέχειας** που πρέπει να υπάρχει στους παραπάνω βασικούς στόχους. Ο John A. Dossey αναφέρει ότι “κινούμενοι προς τον 21ο αιώνα, η πληροφορία και οι πληροφοριακές επικοινωνίες έγιναν ίσης τουλάχιστο σπουδαιότητας (θέματα) με την παραγωγή υλικών αγαθών. Αν και ο φυσικός (ή υλικός) κόσμος συχνά παριστάνεται με την χρήση συνεχών μαθηματικών, δηλαδή με την ανάλυση και ιδέες από την άλγεβρα και την τριγωνομετρία, **ο μη υλικός κόσμος της επεξεργασίας πληροφοριών απαιτεί την χρήση διακριτών μαθηματικών**. Η τεχνολογία των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών έχει αυξανόμενη επίδραση στον τρόπο που τα μαθηματικά παράγονται και χρησιμοποιούνται. Οι υπολογιστές είναι πεπερασμένες, διακριτές μηχανές και έτσι θέματα των διακριτών μαθηματικών είναι σημαντικά στην λύση προβλημάτων με την χρήση υπολογιστικών μεθόδων. Με αυτά τα δεδομένα είναι ιδιαίτερα σημαντικό να γνωρίζουν όλοι τις αρχές και τις μεθόδους των διακριτών μαθηματικών”.

Οι στόχοι της διδασκαλίας της **συνδυαστικής**, εκτός από τους παραπάνω γενικούς στόχους (***μοντελοποίηση, ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης, κατανόηση της βάσης των αλγορίθμων***), πρέπει να είναι (μέσω κυρίως της εφαρμογής) η ανάπτυξη

- της ικανότητας αλγοριθμικής προσέγγισης
- της ικανότητας κριτικής προσέγγισης
- της ικανότητας χρήσης των τεχνικών απαρίθμησης
- της ικανότητας χρήσης της έννοιας της “πιθανότητας”

βλήματα όπως σε προβλήματα στη δημόσια διοίκηση, προβλήματα πολύ-κριτηριακής ανάλυσης, διεθνών σχέσεων

- της ικανότητας χρήσης παραστατικών δομών (όπως οι πίνακες και τα γραφήματα)
- της ικανότητας χρήσης αναδρομικών και επαναληπτικών διαδικασιών

Αριθμοφοβία

Όσοι πιστεύουν ότι δεν μπορούν να εξοικειωθούν και να χρησιμοποιήσουν αριθμούς και μαθηματικές αποδείξεις (οι αριθμόφοβοι) θα είναι οι αγράμματοι του μέλλοντος.

Η αίσθηση των αριθμών

Στη σελ. 16-17 της ελληνικής μετάφρασης του βιβλίου John Allen Paulos ***Innumeracy. Mathematical illiteracy*** ξεκινά «*Χωρίς κάποια αντίληψη των κοινών μεγάλων αριθμών είναι αδύνατο να αντιδράσουμε με τον απαιτούμενο σκεπτικισμό σε τρομακτικές ειδήσεις του τύπου ότι πάνω από ένα εκατομμύριο Αμερικανόπουλα απάγονται κάθε χρόνο, ή με την απαιτούμενη νηφαλιότητα σε μια κεφαλή πυραύλου με εκρηκτική δύναμη ενός μεγατόνου…*» και σκέφτομαι προσαρμόζοντας τη συλλογιστική του ότι εκπλήσσομαι και θλίβομαι όταν συναντώ φοιτητές που δεν έχουν ιδέα πόσος είναι ο κρατικός προϋπολογισμός, πόσος είναι ο πληθυσμός της Ευρωπαϊκής Ένωσης, της Κεντρικής Μακεδονίας, πόση είναι περίπου η απόσταση από το Ιόνιο μέχρι το Αιγαίο ή τι ποσοστό του κόσμου είναι χονδρικά οι Κινέζοι. Προφανώς τότε δεν μπορεί να αντιδράσουμε με τον απαραίτητο σκεπτικισμό σε ειδήσεις του τύπου «***η διαφθορά και η γραφειοκρατία κοστίζει 3,000,000,000 Ευρώ***», «***ανάπτυξη 4,5% του ΑΕΠ***»

Η αίσθηση της πιθανότητας

Συνεχίζει: «*Αν δεν έχετε κάποια αίσθηση των πιθανοτήτων, τα αυτοκινητικά ατυχήματα μπορεί να σας φαίνονται (στην Αμερική) ένα σχετικά μικρό πρόβλημα τοπικών μετακινήσεων, ενώ το να σκοτωθεί κανείς από τρομοκράτες μπορεί να φαντάζει ως μείζων κίνδυνος των ταξιδιών στο εξωτερικό (το 1988). Ωστόσο, όπως πολύ συχνά έχει παρατηρηθεί, τα 45,000 άτομα που σκοτώνονται κάθε χρόνο στους αμερικανικούς αυτοκινητόδρομους είναι περίπου ίσα σε αριθμό με όλους τους Αμερικάνους νεκρούς του πολέμου του Βιετνάμ. Από την άλλη οι 17 Αμερικάνοι που σκοτώθηκαν από τρομοκράτες το 1985 ήταν μεταξύ των 28 εκατομμυρίων συμπατριωτών τους που ταξίδευσαν στο εξωτερικό εκείνη τη χρονιά –αυτό σημαίνει 1 πιθανότητα στα 1,6 εκατομμύρια. Συγκρίνετε το αυτό με τα εξής: 1 στις 68,000 να πνιγεί στραβοκαταπίνοντας, 1 στις 75,000 να πεθάνει σε ποδηλατικό ατύχημα, 1 στις 20,000 να πνιγεί κολυμπώντας και 1 στις 5,300 να πεθάνει σε αυτοκινητικό ατύχημα*».

Αθροισιμότητα

Υπάρχει μια θεμελιώδης ιδιότητα των αριθμών που αναφέρεται στον Αρχιμήδη, σύμφωνα με την οποία οποιοσδήποτε αριθμός, όσο μεγάλος και αν είναι, μπορεί να ξεπεραστεί με την άθροιση ικανής ποσότητας μικρότερων αριθμών, όσο μικροί και αν είναι. «***Δός μοι πα στω και ταν γαν κινήσω***». Προφανώς η επίγνωση της αθροισιμότητας μικρών ποσοτήτων λείπει από τους αριθμόφοβους, που δεν φαίνεται να πιστεύουν ότι οι μικρές τους φιάλες με το σπρέι μαλλιών θα μπορούσαν να παίξουν κάποιο ρόλο στην εξάντληση του όζοντος της ατμόσφαιρας, ούτε ότι το δικό τους διπλοπαρκαρισμένο αυτοκίνητο θα συμβάλλει στο πρόβλημα της κυκλοφορίας.

Απαρίθμηση, αρχές

Ο John von Neumann επινόησε ένα κόλπο για να μη μας κλέβουν στο παιχνίδι κορώνα-γράμματα. Το νόμισμα στρίβεται δύο φορές. Αν έρθει ΚΚ ή ΓΓ ξαναστρίβεται δύο φορές. Αν έρθει ΚΓ κερδίζει το Κ και αν έρθει ΓΚ κερδίζει το Γ. Πράγματι η πιθανότητα των δύο αυτών είναι ίση (όσο φτιαγμένο και να είναι το νόμισμα).

Συνδυασμοί

Όταν τα 8 κορυφαία στελέχη ενός κόμματος πρόκειται να φωτογραφηθούν όλοι μαζί, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 2, υπάρχουν 40,320 διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να παραταχθούν. Σε πόσους ο Κώστας Καραμανλής θα ήταν δίπλα στη Ντόρα Μπακογιάννη (ή ο Γιώργος Παπανδρέου δίπλα στον Κώστα Σημίτη); Όπως θα δούμε στην Άσκηση 3.11 υπάρχουν 10,080 τρόποι, και αν παρατάσσονταν τυχαία και οι 8, η πιθανότητα να βρεθούν ο ένας δίπλα στον άλλο είναι $10{,}080/40{,}320 = 1/4$.

Οι άνθρωποι δεν αντιλαμβάνονται συνήθως πόσο μεγάλα μπορεί να είναι αυτά τα φαινομενικά τακτοποιημένα σύνολα αριθμών. ***Ας υποθέσουμε ότι μία ομάδα 12 παικτών μπάσκετ ξεκινάει με άλλη πεντάδα σε κάθε αγώνα. Δοκιμάστε να υπολογίσετε μετά από πόσους αγώνες θα έχουν εξαντληθεί οι διαφορετικές επιλογές.***

Σε ένα δικαστήριο μια φορά αντιμετώπισα το εξής πρόβλημα: Σε μια κλήρωση είχαν κληρωθεί 11 άτομα για μια επιτροπή από ένα σύνολο 22 ατόμων. Για κάποιο λόγο η κλήρωση επαναλήφθηκε και το αποτέλεσμα της κλήρωσης ήταν ακριβώς το ίδιο.

Πόσο πιθανό ήταν να συμβεί αυτό;

Οι συνδυασμοί 11 ανά 22 είναι 705432. Άρα η πιθανότητα μιας συγκεκριμένης 11αδας είναι $1/705432$. Για να γίνει αυτό δύο διαδοχικές φορές η πιθανότητα είναι $1/5*10^{11}$.

Πιθανότητα και σύμπτωση Πιθανότητα και συνθήκες

«Είσαι και εσύ Ζυγός; Αυτό είναι συναρπαστικό!».

Κάποιος που ταξιδεύει συχνά ανησυχούσε για την πιθανότητα να υπάρχει βόμβα στο αεροπλάνο του. Ερεύνησε την πιθανότητα, τη βρήκε μικρή αλλά όχι αρκετά μικρή για να ησυχάσει, και έτσι τώρα ταξιδεύει πάντα με μια βόμβα στη βαλίτσα του. Το επιχείρημα είναι ότι η πιθανότητα να βρεθούν δύο βόμβες στο ίδιο αεροπλάνο είναι απειροελάχιστη.

Γενικά οι άνθρωποι φλυαρούν για την ειρωνεία της τύχης σε τόσα πράγματα. Πάντως όπως και αν τα ονομάσουμε αυτά τα συμβάντα είναι πιο συνηθισμένα από ότι νομίζουν οι περισσότεροι. Μια τάση **σοβαρής υποτίμησης των συμπτώσεων** είναι βασικό χαρακτηριστικό των αριθμόφοβων, που αποδίδουν εν γένει μεγάλη σημασία σε κάθε λογής αντιστοιχίες ενώ δίνουν πολύ λίγη σημασία σε μάλλον αδιαμφισβήτητα αλλά λιγότερο χτυπητά στατιστικά στοιχεία.

Η αρχή του περιστερώνα

Μια από τις γνωστές αρχές των μαθηματικών είναι η αρχή του περιστερώνα. Σύμφωνα με αυτή σε έναν περιστερώνα με 10 (π.χ.) φωλιές αν φτάσουν 11 περιστέρια είναι βέβαιο ότι θα υπάρχει μία τουλάχιστο όπου θα μπουν οπωσδήποτε 2 (μπορεί και περισσότερα) περιστέρια. Μια άλλη εκλαϊκευμένη εκδοχή είναι το γνωστό ανέκδοτο σύμφωνα με το οποίο ψάχνουμε να βρούμε πόσες κάλτσες πρέπει να πάρει κάποιος μαζί του από ένα ντουλάπι στο οποίο υπάρχουν μαύρες και καφέ κάλτσες έτσι ώστε να σχηματίσει ένα ζευγάρι του ίδιου χρώματος.

Η έννοια του απείρου, η λύση του προβλήματος στάθμευσης

Σε μια πόλη που έχει ελεύθερο οδόστρωμα (ας πούμε) 1000 τ.μ. δεν είναι δυνατόν να χωρέσουν περισσότερα από 200 αυτοκίνητα (αν υποθέσουμε ότι ένα αυτοκίνητο χρειάζεται περίπου 5 τ.μ.). Αν δηλαδή προσπαθήσουν να μπουν 201 αυτοκίνητα τότε δύο τουλάχιστο από αυτά πρέπει να μπουν στην ίδια ακριβώς θέση. Τότε γιατί οι αυτοκινητιστές προσπαθούν, παρά τις διαβεβαιώσεις των αρμοδίων και την εμπειρία τους να χωρέσουν περισσότερα αυτοκίνητα από όσα χωρούν;

Προφανώς πιστεύουν ότι ο χώρος προς κατάληψη από τα αυτοκίνητα είναι άπειρος. Μια από τις εκλαϊκευμένες εκδοχές της έννοιας του άπειρου είναι η εξής: Αν υπάρχουν άπειρες θέσεις παρκαρίσματος με αρίθμηση από το ένα μέχρι το άπειρο, $(1, 2, 3, \ldots, \infty)$ και είναι όλες γεμάτες, τότε το πρώτο διαθέσιμο για παρκάρισμα αυτοκίνητο εύκολα θα βρει χώρο να παρκάρει. Πράγματι αρκεί το αυτοκίνητο που έχει παρκάρει στην θέση ένα θα πάει στη θέση δύο, αυτό που είναι στη θέση δύο θα πάει στη θέση τρία, κ.ο.κ, δηλαδή όλα θα μετακινηθούν κατά μια θέση. Έτσι η θέση ένα θα μείνει κενή και θα γεμίσει από το διαθέσιμο αυτοκίνητο. Ο Ράσελ είχε χρησιμοποιήσει το παράδειγμα με ένα ξενοδοχείο που είναι γεμάτο και έχει άπειρα δωμάτια στο οποίο φτάνει ένας νέος πελάτης, επηρεασμένος προφανώς από την κατάσταση που επικρατούσε στα ελληνικά νησιά το 15αυγουστο τη δεκαετία του '80. Δεν ήξερε την εφευρετικότητα των Ελλήνων οδηγών του 2004.

Γενέθλια την ίδια μέρα

Αν συγκεντρωθούν 367 άνθρωποι είναι βέβαιο ότι 2 από αυτούς θα έχουν γενέθλια την ίδια μέρα. Αν συγκεντρωθούν 13, 2 από αυτούς θα έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα ή το ίδιο ζώδιο. Αν όμως θέλαμε να υπάρχει (για τα γενέθλια) πιθανότητα 50% να συμβεί πόσοι χρειάζεται να συγκεντρωθούν; Μόνο 23 (βλ. άσκηση 3.9). Προφανώς αυτό δεν σημαίνει ότι έχουν 50% πιθανότητα να έχουν γεννηθεί μια συγκεκριμένη ίδια μέρα πχ στις 25 Σεπτεμβρίου. Σε αυτή την περίπτωση χρειάζονται περισσότερα από 254 άτομα (βλ. άσκηση 3.10).

Η απιθανότητα

Το παράδοξο συμπέρασμα είναι ότι θα ήταν πολύ απίθανο να μην προκύπτουν απίθανα συμβάντα. Ότι **κάποιος πολύ γνωστός πολιτικός** θα χωρίσει μέσα στο 2004 όπως προέβλεψε κάποιος αστρολόγος είναι πολύ πιο πιθανό να συμβεί από το να χωρίσει **κάποιος συγκεκριμένος** πολιτικός. Ότι κάποιος τηλεθεατής θα ανακουφιστεί από τον κεφαλόπονο του τη στιγμή που κάποιος μάγος αναφέρει τα σχετικά συμπτώματα είναι πολύ πιο πιθανό από το να συμβεί σε κάποιο συγκεκριμένο τηλεθεατή.

Αν μοιράσουμε τα 52 χαρτιά σε 4 13αδες (στο μπριτζ) η πιθανότητα να πάρουμε τη συγκεκριμένη 13αδα είναι 1 στα 600 δισεκατομμύρια. Προφανώς είναι παράλογο να τα κρατάμε στα χέρια μας και να πούμε ότι δεν τα πήραμε γιατί η πιθανότητα είναι πάρα πολύ μικρή. Σε ορισμένες καταστάσεις οι **απιθανότητες** πρέπει να αναμένονται. Όπως πχ τα γεγονότα της 11/9/2001.

Πόσο απέχουν οι άνθρωποι μεταξύ τους;

Ο Stanley Milgrim έδωσε σε κάθε μέλος μιας τυχαία επιλεγμένης ομάδας ένα έγγραφο και ένα διαφορετικό άτομο-στόχο να φτάσει το έγγραφο. Οι οδηγίες ήταν ότι το έγγραφο έπρεπε να δοθεί σε όποιο γνωστό του είχε τις μεγαλύτερες πιθανότητες να γνωρίζει το άτομο-στόχο και να καθοδηγήσει το πρόσωπο αυτό με τον ίδιο τρόπο. Βρήκε ότι ο αριθμός των ενδιάμεσων κρίκων κυμαίνονταν από δύο μέχρι δέκα με συνηθέστερο το 5. Μπορούμε λοιπόν να καταλάβουμε γιατί **εμπιστευτικές πληροφορίες, φήμες και ανέκδοτα διεισδύουν τόσο γρήγορα σε ένα πληθυσμό**.

Η χρηματιστηριακή απάτη

Εάν είχατε λάβει με το ταχυδρομείο από κάποιο σύμβουλο επί 6 βδομάδες στη σειρά ορθές προβλέψεις για το δείκτη κάποιων μετοχών και σας ζητούσαν να πληρώσετε για την έβδομη αντίστοιχη πρόβλεψη τι θα κάνατε;

Αν ξεκινήσει από 32,000 επιστολές με 16,000 να προβλέπουν άνοδο και 16,000 πτώση. Στις 16,000 σωστές στέλνει στις 8,000 άνοδο και στις 8,000 πτώση. Στις 8,000 σωστές στέλνει στις 4,000 άνοδο και στις 4,000 πτώση. Συνεχίζουμε μέχρι 500 άτομα να έχουν πάρει 6 σωστές προβλέψεις στη σειρά. Για τις πολύτιμες αυτές προβλέψεις ο σύμβουλος ζητάει 500 Ευρώ. Αν πληρώσουν όλοι εισπράττει 250,000. Αν αυτό γίνεται εν γνώσει του δράστη είναι παράνομη κομπίνα. Ωστόσο θεωρείται αποδεκτό όταν γίνεται εν αγνοία ειλικρινών αλλά αδαών. Υπάρχει πάντα αρκετή τυχαία επιτυχία ώστε να δικαιώνεται σχεδόν οτιδήποτε για κάποιον που θέλει να το πιστεύει.

Το πρόβλημα της επιλογής συζύγου

Από τα ποιο παλιά γνωστά προβλήματα είναι το παραπάνω πρόβλημα. Ας υποθέσουμε ότι η «Μαρία» υπολογίζει ότι υπάρχει πιθανότητα να γνωρίσει 4 μόνο υποψήφιους συζύγους ποια στρατηγική πρέπει να ακολουθήσει για να μεγιστοποιήσει τις πιθανότητες εκλογής του καλύτερου;

Γενικά αποδεικνύεται ότι θα πρέπει να αποκλείσει το πρώτο 37% περίπου των Ν μνηστήρων και να διαλέξει τον πρώτο καλύτερο μετά από αυτούς.

Η «Μαρία» αντιλαμβάνεται ότι αν επιλέξει τον πρώτο από τους τέσσερις τότε είναι σίγουρο ότι θα παντρευτεί, αλλά θα επιλέξει τον καλύτερο με πιθανότητα μόλις ¼. Την ίδια πιθανότητα θα έχει αν περιμένει τον τέταρτο και μάλιστα με κίνδυνο να μείνει ανύπαντρη με πιθανότητα ¾ αφού 3 στις 4 φορές ο τελευταίος θα υστερεί σε σχέση με κάποιον από τους προηγούμενους.

Ας υποθέσουμε ότι η στρατηγική Α είναι επιλέγω **από τον δεύτερο και μετά όποιον είναι καλύτερος από τον πρώτο**. Η στρατηγική Β είναι να επιλέξει **από τον τρίτο και μετά αυτόν που είναι καλύτερος από τους δύο πρώτους:**

	Επιλογή Α στρατηγική	**Επιλογή Β στρατηγική**
1234	–	–
1243	–	–
1324	–	–
1342	–	–
1423	–	–
1432	–	–
2134	Α (1)	–
2143	Α (1)	–
2314	Α (1)	Β (1)
2341	Α (1)	Β (1)
2413	Α (1)	Β (1)
2431	Α (1)	Β (1)
3124	Α (1)	-
3142	Α (1)	-
3214	2	Β (1)
3241	2	Β (1)
3412	Α (1)	Β (1)
3421	2	2
4123	Α (1)	–
4132	Α (1)	–
4213	2	Β (1)
4231	2	Β (1)
4312	3	Β (1)
4321	3	2

Έτσι σε 11/24 επιλέγει τον καλύτερο (1) με τη στρατηγική Α και σε 10/24 με τη στρατηγική Β.

Αν η «Μαρία» μπορεί να ελπίζει σε 25 μνηστήρες η στρατηγική της θα ήταν να απορρίψει τους 9 πρώτους και να επιλέξει τον καλύτερο μετά από αυτούς. ***Το να ζήσει με αυτόν είναι μια άλλη ιστορία.***

Η σύμπτωση και ο Νόμος

Statistical reasoning beyond reasonable doubt

Στατιστική συμπερασματολογία πέραν πάσης λογικής αμφιβολίας

Προσπαθώντας να διαλευκάνει μια βομβιστική ενέργεια η αστυνομία συλλαμβάνει έναν άνδρα που έχει ένα άσπρο βαν, γκαζάκια, ένα ρολόι και ένα εγχειρίδιο που περιγράφει πως κατασκευάζουμε βόμβες (πχ τον τσελεμεντέ του αναρχικού). Τι είναι πιο πιθανό: ένας αθώος να κατέχει όλα αυτά τα πράγματα ή ένας που κατέχει αυτά τα πράγματα να είναι αθώος;

Η πλάνη του εισαγγελέα Η πλάνη του συνηγόρου

Ας δεχτούμε ότι στην Αθήνα υπάρχουν 4,000,000 κάτοικοι και σίγουρα ένας ένοχος. Έστω ότι υπάρχουν 10 που έχουν όλα τα παραπάνω. Η πρώτη πιθανότητα είναι 9/3,999,999. Η δεύτερη 9/10. Όποιοι και αν είναι οι πραγματικοί αριθμοί οι δύο αυτές πιθανότητες διαφέρουν δραματικά. Το να τις μπερδεύουμε είναι πολύ επικίνδυνο, ιδιαίτερα για δικηγόρους.

Σχέση και συσχέτιση

Οι εισροές από την Ε.Ε. το 2003 ήταν 4,8 δις € (σχεδόν τα μισά του κόστους των Ολυμπιακών αγώνων), και το καθαρό ισοζύγιο μας με την Ε.Ε. 3,8 δις €. Αυτό δεν σημαίνει ότι η Ε.Ε. πλήρωσε τα μισά έσοδα της ολυμπιάδας. Προφανώς σημαίνει ότι αν δεν ήμασταν μέλος της Ε.Ε. θα είχαμε 3,8 δις € λιγότερα να ξοδέψουμε, αλλά τότε δεν θα κάναμε ολυμπιακούς αγώνες και θα γλιτώναμε 9,6 δις € που κόστισαν. Ράβδος σε γωνία άρα βρέχει! Το κόστος και το όφελος είναι κάτι που δεν υπολογίζεται μόνο σε χρήμα. Κανείς δεν γνωρίζει πόσα (και σε τι) θα ξοδεύαμε αν δεν γίνονταν ολυμπιακοί αγώνες. Και φυσικά εκ των υστέρων είναι αδύνατο να υπολογιστεί κάτι που δεν έχει υλική υπόσταση, όπως π.χ. το όφελος από την ολυμπιάδα. Ο μόνος τρόπος είναι να υπολογιστεί η ωφέλεια του από την προστιθέμενη αξία του. Και φυσικά από το κόστος συντήρησης του.

Η Πιθανότητα

100,000 παιδιά γεννιούνται, 78,000 τελειώνουν το λύκειο, 82,000 θέσεις υπάρχουν στο Πανεπιστήμιο και τα ΤΕΙ, 20,000 σπουδάζουν στο εξωτερικό, είναι άραγε τυχαίο ότι βρίσκεις δύσκολα υδραυλικό, τεχνίτη ή αγρότη που έχει γεννηθεί στην Ελλάδα; Οι Έλληνες αδυνατούν να κατανοήσουν ότι η πιθανότητα να γίνει κάποιος νευροχειρούργος όταν μπαίνει στην Ιατρική είναι 1/1000 (τόσες είναι αναλογικά οι θέσεις ειδικότητας νευροχειρούργου στο σύνολο των ειδικοτήτων). Είναι χαρακτηριστικό ότι όλο και περισσότεροι διαμαρτύρονται γιατί δεν βρίσκουν δουλειά σχετική με την ειδικότητα τους και τα προσόντα τους ενώ θα όφειλαν να γνωρίζουν ότι η ελληνική αγορά εργασίας έχει 15,000 θέσεις κατά χρόνο οι οποίες απαιτούν πτυχίο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Δηλαδή, ένας στους έξι περίπου θα βρει δουλειά σύμφωνα με τα προσόντα του. Αφελές ερώτημα του καθενός από τους έξι. Οι άλλοι πέντε τι θα γίνουν;

Η πραγματικότητα

Γνωστή πλάνη είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων από το άμεσο περιβάλλον. Αν όλοι όσοι με τους οποίους με τον ένα ή άλλο τρόπο σχετιζόμαστε έχουν κάποιο χαρακτηριστικό πιστεύουμε ότι όλη η κοινωνία αποτελείται από ανθρώπους που έχουν αυτό το χαρακτηριστικό. Οι φοιτητές κάνουν παρέα με φοιτητές και πιστεύουν ότι οι περισσότεροι νέοι της ηλικίας τους είναι φοιτητές. Οι γιατροί συγχρωτίζονται με ασθενείς και γιατρούς και πιστεύουν ότι οι περισσότεροι άνθρωποι είναι ή γιατροί ή ασθενείς. Οι πολιτικοί που συνήθως συγχρωτίζονται με διάφορους που τους ζητούν χάρες ή άλλους πολιτικούς νομίζουν ότι οι περισσότεροι είναι οπαδοί τους και ψηφοφόροι του κόμματος τους. Φυσικά τα αποτελέσματα συνήθως διαψεύδουν τους περισσότερους.

Πόσοι είναι οι άνεργοι ανά νοικοκυριό;

Στην Ελλάδα υπάρχουν περίπου 3,000,000 νοικοκυριά. Αν σε κάθε σπίτι υπήρχε και ένας άνεργος (κατά μέσο όρο) θα υπήρχαν 3,000,000 άνεργοι και τρομακτικό ποσοστό ανεργίας που καλύτερα να μην υπολογίσουμε. Υπάρχουν 500,000 με 600,000 άνεργοι, δηλαδή ένας ανά πέντε νοικοκυριά. Θα πει κανείς, ναι αλλά αν χωρίσουμε σε διαφορετικές πεντάδες νοικοκυριών (σύζυγοι, γονείς του ενός, γονείς του άλλου, ο αδελφός του ενός, ο αδελφός του άλλου); Τότε θα ανακαλύψουμε ότι αυτές έχουν κοινά νοικοκυριά (δηλαδή κάποιος ανήκει και στη δική του και στην πεντάδα του αδελφού του και στην πεντάδα του αδελφού της γυναίκας του). Άρα κάθε σπίτι δεν έχει έναν άνεργο. Αυτό δεν σημαίνει ότι ανεργία 10% δεν είναι ένα μέγεθος που πρέπει να μειωθεί.

Ψευδοεπιστήμη

Όταν τον ρωτούν γιατί δεν πιστεύει στην αστρολογία ο μελετητής της λογικής Raymond Smullyan απαντάει ότι είναι Δίδυμος και οι Δίδυμοι δεν πιστεύουν ποτέ στην αστρολογία.

Η προσκόλληση σε ανόητα προηγούμενα και το κλείσιμο και των δύο ματιών είναι πιο εύκολα από τη σκέψη. (William Cowper).

Ακόμα και θεμελιώδεις μαθηματικές αλήθειες μπορεί να εφαρμόζονται λάθος. Είναι παρά πολύ γνωστό ότι αν το μοντέλο ή τα δεδομένα μας δεν αξίζουν, τότε δεν θα αξίζουν ούτε και τα συμπεράσματα. **Ο Η/Υ μπορεί να επεξεργαστεί οποιαδήποτε ανοησία, αυτό δεν την κάνει πιο έγκυρη**.

Το είδος αυτό συλλογισμού δεν περιορίζεται μόνο στους αμόρφωτους. Ένας από τους κοντινούς φίλους του Φρόυντ (Wilhelm Fliess) εφηύρε τη βιορυθμική ανάλυση. Επεσήμανε στον Φρόυντ ότι το 23 και το 28, οι περίοδοι κάποιων μεταφυσικών αρχών, αρσενικών και θηλυκών είχαν τη μοναδική ιδιότητα αν προσθέσετε και αφαιρέσετε κατάλληλα πολλαπλάσια τους, μπορεί να σχηματιστεί οποιοσδήποτε αριθμός. Δηλαδή $Ζ=23\times Χ+28\times Ψ$. Ο Φρόυντ παθιάστηκε τόσο πολύ ώστε πίστευε με πάθος στους βιορυθμούς επί χρόνια. Όπως όμως αποδεικνύεται οποιοιδήποτε δύο αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους (*δηλαδή αριθμοί που δεν έχουν κοινούς διαιρέτες*) έχουν την ιδιότητα να μπορούν να εκφράσουν οποιοδήποτε αριθμό.

Ο Πόππερ ασκεί κριτική σε φράσεις μη διαψεύσιμες που δεν ανήκουν στην επιστήμη. «Ότι θέλησε ο Θεός, θα γίνει…», «Τα αεροπορικά δυστυχήματα πάντα τριτώνουν».

Προφητικά όνειρα

«Μια φορά όταν ήμουν παιδί ονειρεύτηκα πως πέτυχα 4 γκολ σε ένα αγώνα και δύο μέρες μετά πέτυχα 3 γκολ».

Ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα ένα συγκεκριμένο όνειρο να ταιριάξει σε μια σειρά περιστατικών της πραγματικότητας είναι 1 στις 10,000. Άρα το αντίθετο είναι 9,999 στα 10,000. Άρα η πιθανότητα να έχουμε 365 νύχτες με αταίριαστα όνειρα είναι (9,999/10,000) στην 365 δηλαδή 96,4%. Αυτό σημαίνει ότι 3,6% του κόσμου βλέπει φαινομενικά προφητικά όνειρα.

Αστρολογία

Η αστρολογία υποστηρίζει ότι η έλξη της βαρύτητας που ασκούν οι πλανήτες την ώρα που γεννιέται ένας άνθρωπος επιδρά με κάποιο τρόπο στην προσωπικότητα του. Θυμηθείτε, εκτός από το ότι δεν εξηγεί κανείς πως συμβαίνει αυτό, ότι η δύναμη της βαρύτητας που ασκεί ένα αντικείμενο πάνω σε ένα σώμα είναι ανάλογη της μάζας αλλά αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης. Σημαίνει αυτό άραγε ότι οι χοντροί μαιευτήρες ξεγεννάνε μωρά με ορισμένα χαρακτηριστικά στην προσωπικότητα τους, ενώ οι αδύνατοι ξεγεννάνε μωρά με πολύ διαφορετικά χαρακτηριστικά;

Δεσμευμένη πιθανότητα

Ας υποθέσουμε ότι μια εξέταση π.χ. για AIDS έχει 98% ακρίβεια. Δηλαδή αν κάποιος έχει AIDS η εξέταση θα είναι θετική σε 98

στις 100 περιπτώσεις και η εξέταση θα είναι αρνητική σε 98 από τις 100 για αυτόν που δεν έχει AIDS. Υποθέστε ότι το πραγματικό ποσοστό αυτών που έχουν AIDS στον πληθυσμό είναι 0,05%. Ποια είναι η πιθανότητα να έχω AIDS αν η εξέταση είναι θετική;

Ας φανταστούμε ότι έχουμε 100,000 εξετάσεις σε ένα τυχαίο δείγμα του γενικού πληθυσμού. Κατά μέσο όρο 50 από αυτούς έχουν AIDS και αφού το τεστ είναι 98% ακριβές, για 49 από αυτούς το αποτέλεσμα είναι θετικό. Από τους υπόλοιπους 99,950 2% έχουν θετικό αποτέλεσμα. Δηλαδή από τις 99,950 εξετάσεις 1999 έχουν θετικό αποτέλεσμα. Έτσι από το σύνολο των 2049 (50+1999) οι συντριπτικά περισσότερες είναι εσφαλμένα θετικές και επομένως η δεσμευμένη πιθανότητα να έχει κανείς AIDS με δεδομένο ότι το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι θετικό, είναι 50/2049 δηλαδή 2,5% περίπου. (Αν το ποσοστό στον πληθυσμό ήταν 0,5% το ποσοστό αυτό θα ήταν περίπου 20%). Το παραπάνω πρέπει να προβληματίσει όσους σκέφτονται να προτείνουν θέσπιση υποχρεωτικών ή εκτεταμένων εξετάσεων για χρήση ναρκωτικών ή AIDS, ή να κυκλοφορούν διάφορα διαγνωστικά τεστ ελεύθερα προσβάσιμα στο κοινό. Ο στιγματισμός ανθρώπων που βγαίνουν θετικοί, είναι άδικος και έχει τα ακριβώς αντίθετα αποτελέσματα.

Λογική και ψευδοεπιστήμη

Ο W.G. Bush ισχυρίσθηκε ότι δεν μπορεί να αποδείξει ότι δεν υπάρχουν χημικά όπλα στο Ιρακ, επομένως μπορεί να υπάρχουν. Έχει δίκαιο ασφαλώς, ούτε όμως και εγώ μπορώ να αποδείξω ότι οι κάτοικοι του πλανήτη Vega δεν έχουν μια μυστική βάση έξω από τη Βαγδάτη ή στον πυθμένα του Αιγαίου. ***Η αδυναμία οριστικής αναίρεσης οποιουδήποτε ισχυρισμού δεν αποτελεί καμία απόδειξη του.***

Πόθεν η αριθμοφοβία; (John Allen Paulos)

Δυστυχώς, τα δημοτικά σχολεία δεν κάνουν τόσο καλή δουλειά όταν είναι να διδάξουν πότε πρέπει να κάνει κανείς πρόσθεση ή αφαίρεση, πότε πολλαπλασιασμό ή διαίρεση και πώς να μετατρέπει τα κλάσματα σε δεκαδικούς ή ποσοστά. Σπανίως συνδέονται τα προβλήματα με άλλες σχολικές εργασίες –μέσα από ερωτήσεις του τύπου: πόσο πολύ, πόσο μακριά, πόσων ετών, πόσα άτομα. Παιχνίδια, αινίγματα και γρίφοι δεν συζητούνται– πολλές φορές, επειδή είναι πολύ εύκολο για έξυπνα παιδιά να βάλουν τα γυαλιά στους δασκάλους.

Ένα μέρος της ευθύνης για τη μάλλον φτωχή εκπαίδευση των δημοτικών σχολείων ανήκει τελικά στους δασκάλους που δεν είναι αρκετά ικανοί και που πολύ συχνά τρέφουν ελάχιστο ενδιαφέρον ή εκτίμηση για τα μαθηματικά. Και πάλι ένα μέρος της ευθύνης ανήκει στις παιδαγωγικές σχολές των πανεπιστημίων που στο πρόγραμμα τους δίνουν ελάχιστη ή και καθόλου έμφαση στα μαθηματικά.

Οι μαθητές του λυκείου θα έπρεπε να έρθουν σε επαφή με τα λεγόμενα διακριτά μαθηματικά. Η συνδυαστική, η θεωρία γραφημάτων, η θεωρία παιγνίων και ιδιαίτερα οι πιθανότητες αποκτούν όλο και μεγαλύτερη σημασία.

Ένα επίκαιρο ερώτημα

Παραβιάζει την αρχή της μυστικότητας της ψήφου, η καταγραφή όσων ψηφίσουν για την εκλογή προέδρου στο ΠΑΣΟΚ; Με άλλα λόγια δεδομένου ότι κάποιος πήγε να ψηφίσει σε αυτήν υποδηλώνει ότι θα ψηφίσει ΠΑΣΟΚ στις εκλογές;

Κανείς δεν έχει δικαίωμα να γνωρίζει εκ των προτέρων τι θα ψηφίσει κάποιος. Προφανώς, το να είναι κάποιος μέλος ενός κόμματος δεν σημαίνει ότι πρόκειται να το ψηφίσει. Εκτός από τους προφανείς λόγους αδυναμίας, ασθένειας, απρόβλεπτων καταστάσεων, ο κάθε πολίτης (άρα και το μέλος κάθε κόμματος) αποφασίζει τι θα ψηφίσει και ψηφίζει μυστικά. Φυσικά, πιθανολογούμε ότι το μέλος ενός κόμματος είναι πολύ πιθανό να το ψηφίσει. Ακόμη και αν η πιθανότητα αυτή είναι 99% και το 1% είναι αναποφάσιστοι, στους 100,000 πολίτες αυτό σημαίνει 1,000 το σκέφτονται και είναι εξίσου πιθανό να ψηφίσουν τελικά ΠΑ.ΣΟ.Κ. με το να μην ψηφίσουν τελικά ΠΑ.ΣΟ.Κ. Τελικά η πιθανότητα να ψηφίσουν **και οι 1000** ΠΑ.ΣΟ.Κ. είναι 2 εις την μείον 1000 και ισούται με $9{,}33\times10^{-302}$. Ακόμη και 99% να ήταν η πιθανότητα να ψηφίσει κάποιος από τους 1000 «αναποφάσιστους» ΠΑ.ΣΟ.Κ. η πιθανότητα να ψηφίσουν **και οι 1000** ΠΑ.ΣΟ.Κ. θα ήταν $4{,}32\times10^{-5}$, δηλαδή 0,0000432. Προφανώς στο εκλογικό σώμα (σε όσους σκέφτονται να ψηφίσουν ΠΑ.ΣΟ.Κ.) η πιθανότητα αυτή είναι κάτι ανάμεσα στο 85% και το 95% και οι υπολογισμοί διαφορετικοί. Ακόμα και αν όσοι από τα μη μέλη που θα ψηφίσουν για την εκλογή προέδρου του ΠΑΣΟΚ έχουν 99% πιθανότητα να ψηφίσουν τελικά ΠΑΣΟΚ και υποθέσουμε ότι είναι 100,000 ισχύουν αντίστοιχοι αριθμοί. Τέλος ακόμη και για το ΚΚΕ δεν είναι βέβαιο ότι θα το ψηφίσουν όλα τα μέλη του. Αν υποθέσουμε ότι το ΚΚΕ έχει 50,000 μέλη και η πιθανότητα να το ψηφίσουν είναι 99,9% και οι 50 το σκέφτονται με πιθανότητα ½ να το ψηφίσουν, το να το ψηφίσουν **και οι 50** είναι $8{,}88\times10^{-16}$. Η μητέρα όλων των συμπτώσεων!

Άρα δεν πρόκειται όλοι όσοι ψηφίσαν για την εκλογή του προέδρου του ΠΑΣΟΚ να ψηφίσαν ΠΑΣΟΚ στις εκλογές. Αυτό συνέβη με πιθανότητα $9{,}33\times10^{-302}$.

Πόσο πιθανό είναι να ψηφίσει κάποιος ΠΑΣΟΚ ενώ ψήφισε για τον πρόεδρο του ΠΑΣΟΚ;

Προφανώς η πιθανότητα να ψηφίσει κάποιος ΠΑΣΟΚ ενώ έχει ψηφίσει κατά τη διαδικασία εκλογής του προέδρου του ΠΑΣΟΚ (ομάδα Α) είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να ψηφίσει ΠΑΣΟΚ ενώ δεν πήγε να ψηφίσει κατά τη διαδικασία εκλογής του προέδρου του ΠΑΣΟΚ (ομάδα Β). Επειδή όμως το ΠΑΣΟΚ δεν πρόκειται να πάρει μόνο 1,000,000 ψήφους αλλά κάτι κοντά στα 3,000,000 προφανώς **η δεύτερη αυτή πιθανότητα δεν είναι 0**. Μάλιστα δε με αυτούς τους αριθμούς αν στην πρώτη ομάδα η πιθανότητα είναι 95% η πιθανότητα στη δεύτερη είναι 33%.

Προφανώς, παρά την γενική επιδοκιμασία του Γιώργου Παπανδρέου ακόμα και στο στελεχικό δυναμικό του ΠΑΣΟΚ υπάρχουν πολίτες που δεν τον συμπαθούν και δεν τον ψηφίζουν για Πρόεδρο του ΠΑΣΟΚ. Στον γενικό πληθυσμό το ποσοστό αυτό μεταξύ όσων ψήφισαν ΠΑΣΟΚ στις προηγούμενες εκλογές (2000) εκτιμάται από τις δημοσκοπήσεις να είναι ανάμεσα στο 80% και το 90%. Φυσικά, κάποιος που δεν θέλει να ψηφίσει τον Γ. Παπανδρέου είναι πολύ πιθανότερο να μην πήγε να ψηφίσει από το να πήγε να ψηφίσει. Και άρα το πραγματικό ποσοστό αποδοχής μεταξύ των μελών του ΠΑΣΟΚ ή όσων ενδιαφέρονται να συμμετέχουν σε μια τέτοια διαδικασία είναι υπερεκτιμημένο. Ας θυμηθούμε το παράδειγμα όπου στέλνει κανείς μια επιστολή και ζητάει να του απαντήσουμε (ΝΑΙ ή ΟΧΙ) αν συμφωνούμε με τις ταχυδρομικές δημοσκοπήσεις. Προφανώς, όσοι συμφωνούν είναι πολύ πιο πιθανό να απαντήσουν από όσους δεν συμφωνούν. Έτσι, δεν μπορεί να υπολογίσει από τον αριθμό των ΝΑΙ το ποσοστό όσων συμφωνούν ούτε από τις αρνήσεις τον αριθμό όσων δεν συμφωνούν.

Η μαθηματική εκπαίδευση

Δεν θα πρέπει να μας εκπλήσσει ότι ενώ λίγοι μορφωμένοι άνθρωποι θα παραδεχτούν ότι δεν γνωρίζουν καν το όνομα του Σαιξπηρ, του Δάντη ή του Γκαίτε, οι περισσότεροι θα ομολογήσουν την άγνοια τους χωρίς δισταγμό σχετικά με τον Gauss, τον Euler, τον

Laplace, που είναι κατά κάποιο τρόπο το αντίστοιχο τους στα μαθηματικά.

Εν ολίγοις, υπάρχει μια προφανής σύνδεση μεταξύ της αριθμοφοβίας και της κακής μαθηματικής εκπαίδευσης. Πάντως το ζήτημα δεν είναι μόνο αυτό αφού υπάρχουν πολλοί αριθμόφιλοι με λίγη τυπική παιδεία. Πιο ανασταλτικοί για την κατανόηση των μαθηματικών από την αναποτελεσματική ή ανεπαρκή παιδεία είναι οι ψυχολογικοί παράγοντες.

---

1 Θεωρία Συνόλων και Αλγόριθμοι

1.1 Εισαγωγή

Το σύνολο ως μαθηματική έννοια παίζει βασικό ρόλο σε διάφορους τομείς των μαθηματικών. Είναι χρήσιμο λοιπόν να γνωρίζουμε την βασική ορολογία που αφορά στα σύνολα καθώς και τις ιδιότητές τους.

*«**σύνολο** ονομάζουμε μία συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων»*

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν προβλήματα για την λύση των οποίων είναι επιθυμητό να θεωρήσουμε πολλά διακεκριμένα μεταξύ τους αντικείμενα, σαν ένα αντικείμενο. Σε αυτά τα προβλήματα είναι απαραίτητη η χρήση της έννοιας του συνόλου. Ας ορίσουμε λοιπόν την έννοια του συνόλου στα Μαθηματικά: Ένα **σύνολο** είναι μία συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων. Για παράδειγμα η συλλογή των πρωτοετών φοιτητών του Τμήματος των Πολιτικών Επιστημών του Α.Π.Θ. αποτελούν ένα σύνολο. Τα υποχρεωτικά μαθήματα αυτών των φοιτητών αποτελούν ένα άλλο σύνολο. Οι περιττοί φυσικοί αριθμοί που είναι μικρότεροι από το 8 είναι ένα τρίτο σύνολο. Ένα άλλο σύνολο θα μπορούσε να αποτελείται από τους βουλευτές ενός πολιτικού κόμματος.

*«το ΠΑ.ΣΟ.Κ., είναι ένα από τα **στοιχεία ή μέλη** του συνόλου των πολιτικών κομμάτων που έχουν αντιπροσώπους στη Βουλή»*

Τα αντικείμενα ενός συνόλου ονομάζονται **μέλη** ή **στοιχεία** του συνόλου. Ένας τρόπος για να ορίσουμε ένα σύνολο A είναι να γράψουμε όλα τα στοιχεία του, π.χ. $A=\{1, 3, 5, 7\}$. Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε μία η περισσότερες ιδιότητες των στοιχείων του, π.χ. το σύνολο $A=\{x|$ το x έχει κάποιες ιδιότητες$\}$ είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα αντικείμενα x που έχουν αυτές τις ιδιότητες. Έτσι το σύνολο $A=\{1, 3, 5, 7\}$ είναι ίδιο με το σύνολο $A=\{x$ | το x είναι ένας περιττός φυσικός αριθμός μικρότερος από το 8$\}$.

Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $x \in A$ και $x \notin A$ για να δηλώσουμε ότι το x είναι ή δεν είναι στοιχείο του συνόλου A αντίστοιχα. Έτσι έστω το σύνολο $A_1 = \{1, 3, 5, 7\}$. Μπορούμε να γράψουμε ότι $3 \in A_1$, $2 \notin A_1$. Από την άλλη πλευρά για το σύνολο $A_2 = \{x \mid$ το x είναι υποχρεωτικό μάθημα των πρωτοετών φοιτητών του Τμήματος των Πολιτικών Επιστημών του Α.Π.Θ.$\}$ μπορούμε να γράψουμε «Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: εισαγωγή» $\in A_2$ και «Κοινωνική Στατιστική» $\notin A_2$.

*«οι εκλεγμένοι στη Μακεδονία βουλευτές του Κ.Κ.Ε. αποτελούν ένα **γνήσιο υποσύνολο** των βουλευτών του Κ.Κ.Ε. όλης της χώρας»*

Λέμε ότι το σύνολο A είναι **υποσύνολο** του συνόλου B και γράφουμε $A \subseteq B$ εάν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Για παράδειγμα αν $A = \{1, 2\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ τότε $A \subseteq B$ ενώ το A δεν είναι υποσύνολο του συνόλου A_1 όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω γιατί το στοιχείο $2 \notin A_1$. Σημειώνουμε ότι από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι για κάθε σύνολο A ισχύει $A \subseteq A$, δηλαδή κάθε σύνολο θεωρείται υποσύνολο του εαυτού του.

Λέμε ότι δύο σύνολα A και B είναι **ίσα** και γράφουμε $A = B$ εάν αποτελούνται από τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Ένας άλλος τρόπος για να ορίσουμε την ισότητα των συνόλων A και B είναι να γράψουμε $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Αν το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου B και το A δεν είναι ίσο με το B τότε λέμε ότι το A είναι **γνήσιο υποσύνολο** του B (συμβολισμός $A \subset B$).

Επομένως αν

$$A = \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}$$

και $$B = \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα}\}$$

τότε $A \subset B$ καθώς τα A και B δεν είναι ίσα.

Παρατηρήσεις:

1. Σημειώνουμε ότι ο ορισμός δεν αποκλείει την ύπαρξη ενός συνόλου που δεν περιέχει καθόλου στοιχεία. Έτσι ορίζουμε το **κενό σύνολο** ως το σύνολο που στερείται στοιχείων. Για παράδειγμα, στην ερώτηση «δώστε το σύνολο των κατάλληλων για τη θέση του πρωθυπουργού από τους {Καραμανλή, Παπανδρέου, Παπαρήγα}» κάποιος που πιστεύει ότι κανείς από τους παραπάνω δεν είναι κατάλληλος για πρωθυπουργός θα μπορούσε να απαντήσει με το κενό σύνολο. Για το κενό σύνολο χρησιμο-

ποιούμε έναν από τους συμβολισμούς Ø ή { }. Σημειώνουμε ότι το κενό σύνολο θεωρείται ως υποσύνολο κάθε συνόλου.

«όπως και αν διατάξουμε τα στοιχεία ενός συνόλου, το σύνολο δεν αλλάζει»

2. Τα στοιχεία ενός συνόλου δεν θεωρούνται διατεταγμένα, επομένως τα σύνολα {Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα} και {Παπανδρέου, Καραμανλής, Παπαρήγα} είναι ίσα. Συνεπώς ένας πιο πλήρης ορισμός του συνόλου θα ήταν ο εξής: Σύνολο ονομάζουμε μία μη διατεταγμένη συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων.
3. Δεν είναι υποχρεωτικό για τα στοιχεία ενός συνόλου να είναι όμοια. Συνεπώς δεν απαγορεύεται να έχουμε ένα σύνολο όπως το {1, α, «Κοινωνική Στατιστική»}.
4. Τα στοιχεία ενός συνόλου μπορεί να είναι τα ίδια σύνολα. Για παράδειγμα το σύνολο {«$1^{ο}$ έτος», {4, 9}, «Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη»} είναι ένα σύνολο που αποτελείται από τρία στοιχεία. Ένα από τα στοιχεία του συνόλου αυτό είναι το ίδιο ένα σύνολο με δύο στοιχεία: τους αριθμούς 4 και 9. Τα σύνολα που όλα τα στοιχεία τους είναι επίσης σύνολα ονομάζονται και **κλάσεις συνόλων**.

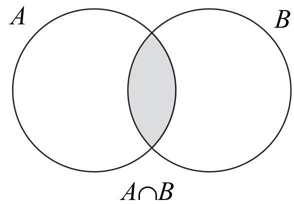
«Καραμανλής, Παπανδρέου: είναι κατάλληλοι για τη θέση του πρωθυπουργού; Δείτε το σύνολο όλων των πιθανών απαντήσεων.»

5. Έστω ένα σύνολο A. Ορίζουμε ως το **δυναμοσύνολο** του A το σύνολο που έχει ως στοιχεία του όλα τα υποσύνολα του A. Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου A συμβολίζεται με $P(A)$. Για παράδειγμα αν $A=${Καραμανλής, Παπανδρέου} τότε το $P(A)=${Ø, {Καραμανλής}, {Παπανδρέου}, {Καραμανλής, Παπανδρέου}}.
6. Τονίζουμε ότι ο ορισμός του συνόλου αναφέρεται σε διακεκριμένα αντικείμενα. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου θέλουμε να ορίσουμε μία συλλογή μη διακεκριμένων στοιχείων. Στις περιπτώσεις αυτές θα αναφερόμαστε σε πολυσύνολα. **Πολυσύνολα** λοιπόν, λέγονται οι συλλογές αντικειμένων που περιέχουν στοιχεία για τα οποία επιτρέπεται να εμφανίζονται στη συλλογή περισσότερες από μία φορά. Για παράδειγμα η συλλογή {1, 1, 3, 5, 5, 5, 7} δεν είναι ένα σύνολο αλλά ένα πολυσύνολο. Από τα πολυσύνολα ιδιαίτερη σημασία έχουν για τη θεωρία γραφημάτων τα πολυσύνολα δύο στοιχείων.

1.2 Πράξεις στα σύνολα

*«το σύνολο των εκλεγμένων στην Επικράτεια βουλευτών του Κ.Κ.Ε. με το σύνολο των εκλεγμένων βουλευτών στην εκλογική περιφέρεια της Χαλκιδικής είναι **ξένα** μεταξύ τους σύνολα.»*

Ονομάζουμε **τομή** δύο συνόλων A και B και τη συμβολίζουμε με $A \cap B$, το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν ταυτόχρονα στα A και B, δηλαδή:

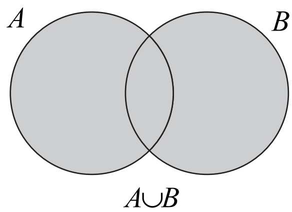


$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$

Για παράδειγμα αν A είναι το σύνολο των πρωτοετών φοιτητών του Τμήματος και B είναι το σύνολο των φοιτητών του Τμήματος που μιλούν Γαλλικά, τότε η τομή τους είναι το σύνολο των φοιτητών του Τμήματος που είναι πρωτοετείς και ταυτόχρονα μιλούν Γαλλικά.

Αν $A \cap B = \{\ \}$ τότε τα σύνολα A και B λέγονται **ξένα** μεταξύ τους.

Ονομάζουμε **ένωση** δύο συνόλων A και B και τη συμβολίζουμε με $A \cup B$, το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν είτε στο A είτε στο B, δηλαδή:

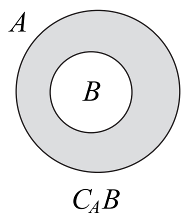


$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

Για παράδειγμα αν A είναι το σύνολο των πρωτοετών φοιτητών του Τμήματος και B είναι το σύνολο των φοιτητών του Τμήματος που μιλούν Γαλλικά, τότε η ένωσή τους είναι το σύνολο των φοιτητών του Τμήματος που είτε είναι πρωτοετείς είτε μιλούν Γαλλικά.

*«το σύνολο των εκλεγμένων βουλευτών στην Α' Θεσσαλονίκης που δεν ανήκουν στο ΠΑ.ΣΟ.Κ. είναι το **συμπληρωματικό** του συνόλου των βουλευτών του ΠΑ.ΣΟ.Κ.*

Αν A είναι ένα σύνολο και B ένα υποσύνολό του, τότε το **συμπληρωματικό** του B ως προς το A (συμβολισμός $C_A B$ ή όταν είναι προφανές ποιο είναι το σύνολο A χρησιμοποιείται ο συμβολισμός B') είναι το σύνολο των στοιχείων του A που δεν είναι στοιχεία του B, δηλαδή:



$$C_A B = \{x \mid x \in A \text{ και } x \notin B\}, \quad \text{όπου } B \subseteq A$$

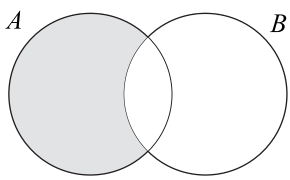
Για παράδειγμα αν A είναι το σύνολο των φοιτητών του Τμήματος που έχουν δηλώσει το μάθημα των Μαθηματικών και B είναι το σύνολο των φοιτητών του Τμήματος που το παρακολουθούν, τότε το $C_A B$ είναι το σύνολο των φοιτητών του Τμήματος που έχουν δηλώσει το μάθημα και δεν το παρακολουθούν.

της Α′ Θεσσαλονίκης ως προς το σύνολο των εκλεγμένων βουλευτών στην ίδια εκλογική περιφέρεια

Η έννοια του συμπληρωματικού συνόλου αποδεικνύεται πολύ χρήσιμη σε ορισμένες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, έστω ότι γνωρίζουμε τα ονόματα των 16 βουλευτών που εκλέγονται στην Α′ Θεσσαλονίκης. Αν θέλαμε να βρούμε ποιοι είναι οι βουλευτές αυτής της περιφέρειας που δεν ανήκουν στο ΠΑ.ΣΟ.Κ. θα έπρεπε να βρούμε ποιοι είναι οι βουλευτές της Ν.Δ., του Κ.Κ.Ε. και του Συνασπισμού. Όμως το σύνολο των εκλεγμένων βουλευτών στην Α′ Θεσσαλονίκης που δεν ανήκουν στο ΠΑ.ΣΟ.Κ. είναι το συμπληρωματικό του συνόλου των βουλευτών του ΠΑ.ΣΟ.Κ. της Α′ Θεσσαλονίκης ως προς το σύνολο των εκλεγμένων βουλευτών στην ίδια εκλογική περιφέρεια. Άρα αν γνωρίζουμε τα ονόματα των 6 βουλευτών που έχουν εκλεγεί από το ΠΑ.ΣΟ.Κ. σε αυτή την περιφέρεια, μπορούμε να τα διαγράψουμε από το σύνολο που αναφέρεται στο σύνολο των βουλευτών της περιφέρειας για να καταλήξουμε στο ζητούμενο. Επιπλέον αν μας ενδιαφέρει το πλήθος των βουλευτών που δεν ανήκουν στο ΠΑ.ΣΟ.Κ., θα πρέπει να βρούμε πόσοι είναι οι βουλευτές της Ν.Δ., του Κ.Κ.Ε. και του Συνασπισμού και στη συνέχεια να αθροίσουμε αυτά τα ποσά. Από την άλλη πλευρά με την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να καταλήξουμε πιο σύντομα στο ζητούμενο αριθμό αφαιρώντας το πλήθος του βουλευτών του ΠΑ.ΣΟ.Κ. (6) από το συνολικό πλήθος των βουλευτών (16).

«αν Α είναι το σύνολο των ψηφοφόρων του Βενιζέλου και Β το σύνολο των ψηφοφόρων του Καστανίδη, τότε Α-Β είναι το σύνολο αυτών που ψηφίζουν τον Βενιζέλο αλλά όχι τον Καστανίδη, και Α⊕Β είναι το σύνολο αυτών που

Ορίζουμε ως τη **διαφορά** δύο συνόλων A και B (συμβολισμός $A–B$), το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν στο A αλλά δεν ανήκουν στο B, δηλαδή:

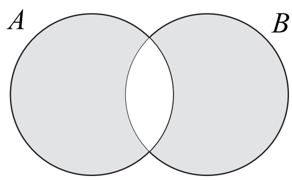


A-B

$$A–B=\{x \mid x \in A \text{ και } x \notin B\}$$

Για παράδειγμα αν A είναι το σύνολο των πρωτοετών φοιτητών του Τμήματος και B είναι το σύνολο των φοιτητών του Τμήματος που μιλούν Γαλλικά, τότε η διαφορά τους είναι το σύνολο των φοιτητών του Τμήματος που είναι πρωτοετείς και δεν μιλούν Γαλλικά.

Τέλος ορίζουμε ως τη **συμμετρική διαφορά** δύο συνόλων A και B (συμβολισμός $A\oplus B$), το σύνολο των στοιχείων που είτε ανήκουν στο A είτε ανήκουν στο B αλλά δεν ανήκουν ταυτόχρονα και



A⊕B

ψηφίζουν είτε τον ένα, είτε τον άλλο αλλά όχι και τους δύο μαζί»

στο A και στο B δηλαδή:

$$A \oplus B = \{x \mid x \in A \cup B \text{ και } x \notin A \cap B\}$$

Για παράδειγμα αν A είναι το σύνολο των πρωτοετών φοιτητών του Τμήματος και B είναι το σύνολο των φοιτητών του Τμήματος που μιλούν Γαλλικά, τότε η συμμετρική διαφορά τους είναι το σύνολο που περιλαμβάνει τους φοιτητές του Τμήματος που είτε είναι πρωτοετείς είτε μιλούν Γαλλικά αλλά δεν περιλαμβάνει τους φοιτητές που είναι πρωτοετείς και ταυτόχρονα μιλούν Γαλλικά.

1.3 Συναρτήσεις

*«ο μηχανισμός που αντιστοιχίζει τα στοιχεία του συνόλου {Παπανδρέου, Καστανίδης, Καραμανλής} στα στοιχεία του συνόλου {ΠΑ.ΣΟ.Κ., Ν.Δ.} είναι μία **συνάρτηση**»*

Έστω δύο μη κενά σύνολα A, B. Λέμε ότι η φ είναι μία **συνάρτηση** ή απεικόνιση του συνόλου A στο σύνολο B αν μέσω της φ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κάθε στοιχείο του A σε ακριβώς ένα στοιχείο του B.

Έτσι σε κάθε στοιχείο α του συνόλου A αντιστοιχίζουμε ένα μοναδικό στοιχείο β του συνόλου B το οποίο ονομάζουμε **εικόνα** ή **τιμή** του α και το συμβολίζουμε με $\varphi(\alpha)$ ενώ το στοιχείο α θα λέγεται πρότυπο του β. Για τη συνάρτηση φ χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\varphi\colon A \to B$.

Το σύνολο A ονομάζεται **πεδίο ορισμού** και το σύνολο B ονομάζεται **πεδίο τιμών** της συνάρτησης φ.

Δύο συναρτήσεις φ και ψ θα λέγονται **ίσες**, αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, το ίδιο πεδίο τιμών και για κάθε στοιχείο α του πεδίου ορισμού ισχύει $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha)$.

Έστω μία συνάρτηση $\varphi\colon A \to B$. Θα ονομάζουμε **σύνολο τιμών** της φ το σύνολο όλων των στοιχείων του B που αποτελούν εικόνες των στοιχείων του A. Το σύνολο τιμών της φ θα το συμβολίζουμε $\varphi(A)$. Προφανώς ισχύει: $\varphi(A) \subseteq B$. Αν $\varphi(A) = B$ τότε η φ θα ονομάζεται συνάρτηση του συνόλου A **επί** του συνόλου B. Με άλλα λόγια η συνάρτηση φ θα λέγεται συνάρτηση του συνόλου A επί του συνόλου B αν για κάθε στοιχείο β του συνόλου B μπορούμε να βρούμε ένα στοιχείο α του συνόλου A τέτοιο ώστε $\varphi(\alpha) = \beta$.

Προφανώς ο ορισμός της συνάρτησης δεν απαγορεύει δύο διαφορετικά πρότυπα του πεδίου ορισμού A να έχουν την ίδια εικόνα στο πεδίο τιμών B μέσω μίας συνάρτησης φ. Μία συνάρτηση φ: $A \rightarrow B$ θα λέγεται **αμφιμονοσήμαντη** εάν για κάθε ζεύγος στοιχείων α_1, α_2 του συνόλου A ισχύει $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow \varphi(\alpha_1) \neq \varphi(\alpha_2)$.

«η συνάρτηση φ που αντιστοιχίζει κάθε αρχηγό ενός πολιτικού κόμματος στο ίδιο το πολιτικό κόμμα είναι μία συνάρτηση ***ένα προς ένα****»*

Τέλος αν μία συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη και επί τότε θα ονομάζεται συνάρτηση **ένα προς ένα**. Με τη φράση «ένα προς ένα» εννοούμε ότι υπάρχει τρόπος να αντιστοιχίσουμε τα στοιχεία του A στα στοιχεία του B με τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε στοιχείο του A να αντιστοιχεί ένα ακριβώς στοιχείο του B και αντιστρόφως.

Για παράδειγμα η συνάρτηση φ που αντιστοιχίζει κάθε αρχηγό ενός πολιτικού κόμματος στο ίδιο το πολιτικό κόμμα είναι μία συνάρτηση ένα προς ένα.

1.4 Διατεταγμένα ζεύγη. Διμελείς σχέσεις

Όπως θα δούμε αργότερα υπάρχουν μαθηματικές έννοιες που σχετίζονται με διμελείς συλλογές αντικειμένων (συλλογές από δύο αντικείμενα) στις οποίες η σειρά με την οποία εμφανίζονται τα αντικείμενα είναι σημαντική. Σε αυτές τις περιπτώσεις η χρήση μη διατεταγμένων συνόλων δεν μας εξυπηρετεί, για αυτό θα πρέπει να ορίσουμε την έννοια του διατεταγμένου ζεύγους.

Διατεταγμένο ζεύγος

Διατεταγμένο ζεύγος είναι ένα ζεύγος αντικειμένων τοποθετημένων σε μία καθορισμένη σειρά. Για ένα διατεταγμένο ζεύγος που έχει ως πρώτο αντικείμενο το α και ως δεύτερο αντικείμενο το β χρησιμοποιούμε το συμβολισμό (α, β). Σημειώνουμε ότι ο ορισμός του διατεταγμένου ζεύγους δεν αναφέρεται σε διακριτά αντικείμενα και άρα το διατεταγμένο ζεύγος (α, α) είναι καλώς ορισμένο.

1.4.1 Διμελής Σχέση

«αν σε μία εκλογική περιφέρεια A είναι το σύνολο των ψηφοφόρων

Έστω ότι δίνονται δύο μη κενά σύνολα A, B. Από τα στοιχεία $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ μπορούμε να δημιουργήσουμε τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β). Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (α, β), όπου $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ θα το καλούμε **καρτεσιανό γινόμενο** των συνόλων A, B και θα το συμβολίζουμε $A \times B$. Άρα