• ΚΕΦΑΛΑΙΑ •

ΦΥΣΙΚΗΣ

Α. Αναγνωστόπουλος
Ε. Δόνη
Θ. Καρακώστας
Φ. Κομνηνού

Εκδόσεις Ζήτη
Θεσσαλονίκη

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό έχει ως σκοπό να καλύψει τις διδακτικές ανάγκες των φοιτητών του Τμήματος Γεωπονίας του Α.Π.Θ. στο πλαίσιο του μαθήματος "Φυσική" που διδάσκεται στο πρώτο εξάμηνο. Η αναπροσαρμογή της ύλης που έγινε σε συνεργασία με το Τμήμα Γεωπονίας μας οδήγησε στη συγγραφή του παρόντος συγγράμματος που καλύπτει τις παραδόσεις του μαθήματος.

Το βιβλίο αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος καλύπτει τα θέματα "Μηχανική" και "Ηλεκτρισμός", στα οποία η έκταση και η διαπραγμάτευση της ύλης έγινε κατά τέτοιο τρόπο ώστε να προσφέρουν τις εισαγωγικές έννοιες στα αντικείμενα αυτά για τους φοιτητές των Γεωτεχνικών Επιστημών. Η συγγραφή της Μηχανικής έγινε από την Ε. Δόνη, ενώ του Ηλεκτρισμού από τον Α. Αναγνωστόπουλο. Το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει περιληπτικά ορισμένα βασικά θέματα που συμπληρώνουν τις απαιτήσεις του μαθήματος, έχει γραφεί από τους Θ. Καρακώστα και Φ. Κομνηνού και είναι τμήμα του βιβλίου "Ειδικά Κεφάλαια Φυσικής" το οποίο διδάσκεται στο Τμήμα Κτηνιατρικής του Α.Π.Θ.

Οι συγγραφείς ελπίζουν ότι το βιβλίο θα γίνει αντικείμενο κριτικής μελέτης από τους φοιτητές, ώστε να υπάρξει δυνατότητα περαιτέρω βελτίωσής του.

Θεσσαλονίκη 1993 | *Οι συγγραφείς*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α

3. ΦΑΣΜΑΤΟΣΚΟΠΙΑ ΜΟΡΙΩΝ

4. ΡΑΔΙΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΔΟΣΙΜΕΤΡΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1. Εισαγωγή

Η **Φυσική** είναι το εργαλείο με το οποίο ο άνθρωπος προσπαθεί να ερμηνεύσει το φυσικό του περιβάλλον, δηλαδή τα φυσικά φαινόμενα και τις μεταβολές που συμβαίνουν. Οι αρχικές παρατηρήσεις αφορούσαν φαινόμενα που μπορεί ο άνθρωπος να αντιληφθεί με τις αισθήσεις του, σήμερα όμως όλο και πιο πολύπλοκα φαινόμενα μελετώνται για τα οποία ο άνθρωπος δεν μπορεί να έχει οικείες και αναγνωρίσιμες παραστάσεις. Το περιβάλλον του ανθρώπου εκτείνεται από τον αόρατο μικρόκοσμο των στοιχειωδών σωματιδίων μέχρι τους "ακραίους" γαλαξίες που χωρίζονται με ασύλληπτες ενδογαλαξιακές αποστάσεις· περιλαμβάνει συνεπώς κάθε τι το υπαρκτό και έχει μία ονομασία, **σύμπαν**. Σήμερα, δεχόμαστε ότι το σύμπαν αποτελείται από **ύλη** (ουσία και πεδίο), η οποία έχει δύο ανεξάρτητες και θεμελιώδεις ιδιότητες, τη **μάζα** (ή την ισοδύναμή της **ενέργεια**) και το **ηλεκτρικό φορτίο**. Μπορούμε λοιπόν να δώσουμε ένα πιο αυστηρό ορισμό και να πούμε ότι ***Φυσική*** *είναι η επιστήμη η οποία ασχολείται με τις πιο γενικές ιδιότητες, νόμους και μορφές της κίνησης της ύλης.*

Η Φυσική δεν μας εξηγεί τον πραγματικό τρόπο με τον οποίο συμβαίνουν τα πράγματα, αλλά τον τρόπο που ο άνθρωπος βρίσκει πρόσφορο για την περιγραφή των φαινομένων. Ο βασικός δρόμος που ακολουθείται είναι η **παρατήρηση** των φαινομένων και στη συνέχεια η επανάληψή τους με **πειράματα**, δηλαδή η παρατήρηση και η μελέτη των φαινομένων κάτω από επακριβώς ελεγχόμενες συνθήκες. Στη συνέχεια για την ερμηνεία των πειραματικών δεδομένων γίνονται διάφορες επιστημονικές **υποθέσεις**. Όταν μία υπόθεση μπορεί να ερμηνεύσει μία ευρεία κατηγορία φαινομένων και να προβλέψει επιτυχώς άλλα, τότε γίνεται μία **φυσική θεωρία** ή **νόμος**. *Η* ***θεωρία*** *λοιπόν είναι ένα σύστημα βασικών ιδεών, το οποίο εξηγεί ένα σύνολο φαινομένων κάτω από κοινό σημείο θεώρησης και οδηγεί στην πρόβλεψη άλλων φαινομένων.*

1.2. Μετρήσεις - μονάδες

Όπως είδαμε προηγουμένως, η Φυσική είναι μία επιστήμη πειραματική, η οποία προχωρεί σε μέτρηση των φυσικών μεγεθών που εμφανίζονται στα διάφορα φαινόμενα. Η διατύπωση των φυσικών νόμων με μαθηματικές σχέσεις κάνει αναγκαίες τις μετρήσεις, οι οποίες γίνονται γενικά με άμεσο ή έμμεσο τρόπο και με τη βοήθεια κατάλληλων οργάνων. ***Μέτρηση*** *ενός μεγέθους είναι η σύγκρισή του με ένα άλλο ομοειδές και της αυτής φύσης μέγεθος, το οποίο κατά συνθήκη λαμβάνεται ως μονάδα.*

Υπάρχει πληθώρα φυσικών μεγεθών και όπως φαίνεται ο αριθμός τους συνεχώς θα αυξάνεται. Είναι φανερό ότι το εύρος των μετρούμενων μεγεθών (βλέπε Πίνακα 1.1), σε συνδυασμό με τα διάφορα συστήματα μονάδων που κατά καιρούς χρησιμοποιήθηκαν, είχε ως αποτέλεσμα την επικράτηση ανόμοιων μονάδων και τη δυσκολία επικοινωνίας και σύγκρισης των αποτελεσμάτων μεταξύ των διαφόρων επιστημόνων.

Σήμερα και ύστερα από διεθνή συμφωνία οι επιστήμονες χρησιμοποιούν το διεθνές σύστημα μονάδων, SI (Système International). Για το σκοπό αυτό έχουν επιλεγεί επτά **θεμελιώδη μεγέθη**, ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, από τα οποία μπορούν να παραχθούν όλα τα άλλα φυσικά μεγέθη που ονομάζονται πλέον **παράγωγα.** Μετά τον ορισμό των **θεμελιωδών μονάδων μέτρησης** για τα θεμελιώδη μεγέθη, οι μονάδες μέτρησης των παραγώγων μεγεθών εκφράζονται ως συνδυασμός των θεμελιωδών μονάδων και αποτελούν τις **παράγωγες μονάδες**. Τα επτά θεμελιώδη μεγέθη είναι το **μήκος**, η **μάζα** και ο **χρόνος** στη μηχανική, καθώς επίσης και τα μεγέθη που αναφέρονται στον **ηλεκτρισμό,** τη **θερμοδυναμική,** τη **φωτομετρία** και την **ποσότητα ουσίας**. Τα θεμελιώδη μεγέθη και οι μονάδες τους στο SI φαίνονται στον Πίνακα 1.2.

Θα εξετάσουμε τώρα τις θεμελιώδεις μονάδες μέτρησης μήκους, μάζας και χρόνου που είναι αντίστοιχα το 1 **μέτρο** (m), το 1 **χιλιόγραμμο** (kg) και το 1 **δευτερόλεπτο** (s). Με τα μεγέθη αυτά εκφράζονται όλες οι μηχανικές ιδιότητες. Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα πρότυπα των μονάδων μέτρησης πρέπει να είναι προσιτά στον κόσμο ώστε να μπορούν να κατασκευάζονται δευτερεύοντα πρότυπα με ικανοποιητική ακρίβεια, να είναι αμετάβλητα και σε περίπτωση καταστροφής να μπορούν να αναπαραχθούν με ακρίβεια. Για τους λόγους αυτούς για τα πρότυπα των μονάδων χρησιμοποιήθηκαν διάφοροι ορισμοί που σχετίζονται με φυσικά φαινόμενα, φυσικές ιδιότητες των σωμάτων ή με τις **θεμελιώδεις σταθερές** της φύσης.

Για πολλά χρόνια το πρότυπο μέτρο ήταν η απόσταση μεταξύ δύο χαραγών σε ράβδο κατασκευασμένη από ιριδιούχο λευκόχρυσο και διατηρούμενη σε σταθερή θερμοκρασία (0°C). Η ράβδος αυτή φυλάσσεται στο Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών στις Sèvres, κοντά στο Παρίσι. *Σήμερα, η μονάδα μήκους, το μέτρο (m), ορίζεται ως το διάστημα που ταξιδεύει το φως στο κενό σε χρόνο 1/299.792.458 του δευτερολέπτου.* Είναι φανερό ότι η μονάδα αυτή ορίζεται με τη βοήθεια της παγκόσμιας σταθερής της ταχύτητας του φωτός στο κενό, που εξ ορισμού είναι $c = 299.792.458$ m/s.

Πίνακας 1.1

Εύρος του μήκους, της μάζας και του χρόνου στο σύμπαν.

Μήκος (σε μέτρα)	
10^{-17}	Πειραματικό όριο στον προσδιορισμό της πυρηνικής δομής
10^{-15}	Διάμετρος του πρωτονίου
10^{-10}	Διάμετρος του ατόμου
10^{-6}	Μήκος κύματος του ορατού φωτός
1	Ύψος του ανθρώπου
10^{7}	Ακτίνα της Γης (6.371 km)
10^{11}	Ακτίνα της γήινης τροχιάς (149×10^{6} km)
10^{16}	Έτος φωτός
10^{22}	Απόσταση του πλησιέστερου γαλαξία (Μ31 (Ανδρομέδα))
10^{26}	Ακτίνα του σύμπαντος
	Εύρος $10^{26}/\ 10^{-17} = 10^{43}$
Μάζα (σε χιλιόγραμμα)	
10^{-30}	Μάζα του ηλεκτρονίου
10^{-27}	Μάζα του πρωτονίου
10^{2}	Μάζα του ανθρώπου
10^{25}	Μάζα της Γης ($5{,}98\times10^{24}$ kg)
10^{30}	Μάζα του Ηλίου ($1{,}99\times10^{30}$kg)
10^{41}	Μάζα του Γαλαξία μας
10^{52}	Μάζα του σύμπαντος
	Εύρος $10^{52}/10^{-30} = 10^{82}$
Χρόνος (σε δευτερόλεπτα)	
10^{-23}	Χρόνος που χρειάζεται το φως για να διασχίσει ένα πρωτόνιο
10^{-15}	Περίοδος του κύματος φωτός
10^{-8}	Χρόνος εκπομπής ενός φωτονίου
10^{7}	Ένα έτος ($3{,}16\times10^{7}$s)
10^{16}	Χρόνος που το ηλιακό σύστημα συμπληρώνει μία περιστροφή γύρω από το γαλαξιακό κέντρο
10^{17}	Ηλικία της Γης
10^{18}	Ηλικία του σύμπαντος
	Εύρος $10^{18}/10^{-23} = 10^{41}$

Πίνακας 1.2

Τα θεμελιώδη μεγέθη και οι μονάδες τους στο SI.

Μέγεθος	Ελληνική ονομασία μονάδας	Διεθνής ονομασία μονάδας	Σύμβολο μονάδας
Μήκος	Μέτρο	Meter	m
Μάζα	Χιλιόγραμμο	Kilogram	kg
Χρόνος	Δευτερόλεπτο	Second	s
Ηλεκτρικό ρεύμα	Αμπέρ	Ampere	A
Θερμοδυναμική θερμοκρασία	Κέλβιν	Kelvin	K
Φωτεινή ένταση	Καντέλα	Candela	cd
Ποσότητα ουσίας	Γραμμομόριο	Mole	mol

Η μονάδα μάζας, το χιλιόγραμμο (kg), ορίζεται σήμερα όπως και παλαιότερα, δηλαδή είναι η μάζα του πρότυπου χιλιογράμμου, που είναι ένας κύλινδρος από ιριδιούχο λευκόχρυσο με ύψος και διάμετρο βάσης 39 mm. Και το πρότυπο αυτό φυλάσσεται στις Sèvres.

Τέλος η μονάδα χρόνου, το δευτερόλεπτο (s), αρχικά είχε ορισθεί με τη βοήθεια της διάρκειας της ημερήσιας περιστροφής της Γης, δηλαδή της μέσης ηλιακής ημέρας. *Σήμερα, το δευτερόλεπτο ορίζεται ως 9.192.631.770 φορές η διάρκεια περιόδου της ακτινοβολίας που προκύπτει από τη μετάπτωση υπέρλεπτης υφής του ατόμου του καισίου (Cs^{133}).*

Επειδή, όπως έχουμε αναφέρει, υπάρχει μεγάλο εύρος των μετρούμενων μεγεθών, γι’ αυτό χρησιμοποιούνται πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια των μονάδων, με τη μορφή δυνάμεων του 10, που εκφράζονται με κατάλληλα προθέματα. Τα προθέματα αυτά φαίνονται στον Πίνακα 1.3.

Πίνακας 1.3

Τα προθέματα και τα σύμβολά τους στις μονάδες του SI.

Αριθμητικός παράγοντας	Πρόθεμα	Αγγλική ονομασία	Σύμβολο	Αριθμητικός παράγοντας	Πρόθεμα	Αγγλική ονομασία	Σύμβολο
10^{18}	έξα	exa	E	10^{-1}	ντέσι	deci	d
10^{15}	πέτα	peta	P	10^{-2}	σέντι	centi	c
10^{12}	τέρα	tera	T	10^{-3}	μίλλι	milli	m
10^{9}	γίγα	giga	G	10^{-6}	μίκρο	micro	μ
10^{6}	μέγα	mega	M	10^{-9}	νάνο	nano	n
10^{3}	κίλο	kilo	k	10^{-12}	πίκο	pico	p
10^{2}	έκτο	hecto	h	10^{-15}	φέμτο	femto	f
10^{1}	δέκα	deca	da	10^{-18}	άτο	atto	a

1.3. Διαστάσεις των παραγώγων μεγεθών

Όλες οι μονάδες των παραγώγων μεγεθών, είτε έχουν ιδιαίτερη σημασία είτε όχι, μπορούν να εκφραστούν πάντοτε ως γινόμενα δυνάμεων του μήκους, της μάζας και του χρόνου. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται η μαθηματική σχέση ορισμού του μεγέθους. Για παράδειγμα, όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια, η ταχύτητα στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και η δύναμη, σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, εκφράζονται από τις ακόλουθες αντίστοιχα σχέσεις

$$\upsilon = \frac{s}{t} \qquad \text{ή} \quad \text{ταχύτητα} = \frac{\text{μήκος}}{\text{χρόνος}} \tag{1.1}$$

και

$$F = ma \qquad \text{ή} \quad \text{δύναμη} = \text{μάζα} \times \text{επιτάχυνση} \ . \tag{1.2}$$

Αν συμβολίσουμε με L, M, T τα θεμελιώδη μεγέθη μήκους, μάζας, χρόνου, τότε οι σχέσεις (1.1) και (1.2) μπορούν να γραφούν με τη μορφή

$$[\upsilon] = \frac{[L]}{[T]} = [LT^{-1}] \tag{1.3}$$

και

$$[F] = [M]\,[a] = [M]\,[LT^{-2}] = [LMT^{-2}] \ . \tag{1.4}$$

Οι εξισώσεις (1.3) και (1.4) ονομάζονται **εξισώσεις διαστάσεων** της ταχύτητας και της δύναμης αντίστοιχα και δείχνουν την εξάρτηση του παράγωγου μεγέθους από τα θεμελιώδη, εξάρτηση η οποία είναι καθαρά ποιοτική και όχι ποσοτική. Οι εκθέτες των μεγεθών L, M, T ονομάζονται **διαστάσεις** του θεωρούμενου φυσικού μεγέθους. Αν τις σχέσεις (1.3) και (1.4) τις γράψουμε ως

$$[\upsilon] = [L^1M^0T^{-1}] \tag{1.5}$$

$$[F] = [L^1M^1T^{-2}] \tag{1.6}$$

μπορούμε να πούμε ότι οι διαστάσεις της ταχύτητας είναι $1, 0, -1$ και της δύναμης $1, 1, -2$.

Οι εξισώσεις διαστάσεων και οι διαστάσεις ενός μεγέθους εξαρτώνται από το χρησιμοποιούμενο σύστημα μονάδων, αφού η εξίσωση ορισμού του μεγέθους και τα θεμελιώδη μεγέθη μπορεί να διαφέρουν από σύστημα σε σύστημα μονάδων. Οι εξισώσεις διαστάσεων χρησιμοποιούνται για τη μετάβαση από ένα σύστημα μονάδων σε ένα άλλο που έχει τα ίδια θεμελιώδη μεγέθη, δηλαδή για την εύρεση των συντελεστών μετατροπής των μονάδων. Επίσης χρησιμοποιούνται για τη διαπίστωση της ομοιογένειας των φυσικών τύπων, όπως αυτοί εκφράζονται με τις μαθηματικές εξισώσεις συσχετισμού των διαφόρων φυσικών μεγεθών.

Παράδειγμα 1.1. Στο SI η μονάδα μέτρησης ισχύος είναι το 1 Watt (W), ενώ στο CGS (που έχει τις ίδιες θεμελιώδεις μονάδες) η μονάδα ισχύος είναι το 1 erg/s. Ποια είναι η σχέση του Watt με το erg/s;

ΛΥΣΗ. Η ισχύς ορίζεται ως το παραγόμενο έργο στη μονάδα του χρόνου, δηλαδή

$$P = \frac{W}{t} \quad ή \quad ισχύς = \frac{έργο}{χρόνος} = \frac{δύναμη \times μήκος}{χρόνος} \quad ή \quad P = \frac{F\,s}{t} \ . \tag{A}$$

Έχοντας υπόψη την (1.6) η εξίσωση διαστάσεων της ισχύος είναι

$$[P] = [L^1 M^1 T^{-2}]\,[L]\,[T^{-1}] = [L^2 M^1 T^{-3}] \ . \tag{B}$$

Στο σύστημα CGS οι θεμελιώδεις μονάδες είναι τα 1cm, 1g, και 1s. Επειδή 1m=100 cm και 1 kg=1000 g, από την (Β) προκύπτει ότι

$$\frac{[P]_{SI}}{[P]_{CGS}} = \left(\frac{100}{1}\right)^2 \left(\frac{1000}{1}\right)^1 \left(\frac{1}{1}\right)^{-3} . \tag{Γ}$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι 1 W=10^7 erg/s.

Παράδειγμα 1.2. Η δυναμική ενέργεια σώματος μάζας m σε ύψος h επάνω από το έδαφος είναι V=mgh, όπου g η επιτάχυνση βαρύτητας της Γης. Να επαληθευτεί η ομοιογένεια του τύπου.

ΛΥΣΗ. Η δυναμική ενέργεια έχει τις ίδιες διαστάσεις με το έργο (= δύναμη × μήκος), δηλαδή η εξίσωση διαστάσεών της είναι

$$[V] = [L^1 M^1 T^{-2}]\,[L] = [L^2 M^1 T^{-2}] \ . \tag{A}$$

Το γινόμενο mgh έχει εξίσωση διαστάσεων την

$$[mgh] = [M]\,[LT^{-2}]\,[L] = [L^2 M^1 T^{-2}] \ . \tag{B}$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (Α) και (Β) διαπιστώνουμε την ομοιογένεια του δοθέντος τύπου.

Παράδειγμα 1.3. Η περίοδος αιώρησης T_0 του απλού εκκρεμούς εξαρτάται από το μήκος l του νήματος του εκκρεμούς και την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Ποια πρέπει να είναι η μορφή αυτής της έκφρασης ώστε από άποψη διαστάσεων να είναι σωστή;

ΛΥΣΗ. Η περίοδος μπορεί να γραφεί με την ακόλουθη μορφή γινομένου

$$T_0 = k\, l^m g^n \ , \tag{A}$$

όπου k είναι μία αδιάστατη σταθερή και m, n είναι άγνωστοι εκθέτες που πρέπει να προσδιοριστούν. Η ισοδύναμη εξίσωση διαστάσεων που προκύπτει από την (Α) είναι

$$[T] = [L]^m\,[LT^{-2}]^n = [L]^{m+n}\,[T]^{-2n} \ . \tag{B}$$

Στο αριστερό μέλος της (Β), το [Τ] είναι υψωμένο στην πρώτη δύναμη και στο ίδιο αποτέλεσμα πρέπει να καταλήγει και το δεξιό μέλος. Συνεπώς $-2n = 1$ και $n = -1/2$. Επίσης $m+n = 0$ και επειδή $n = -1/2$ είναι $m = 1/2$. Έτσι η εξίσωση (Α) γίνεται

$$T_0 = k\, l^{1/2}\, g^{-1/2} = k \sqrt{\frac{l}{g}} \; . \tag{Γ}$$

Η ανάλυση των διαστάσεων μας έδωσε τη μορφή της εξίσωσης, δεν μπορεί όμως να μας προσδιορίσει την τιμή της σταθερής k. Είναι βέβαια γνωστό ότι $k = 2\pi$.

Κεφάλαιο 2

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

2.1. Εισαγωγή

Η **μηχανική** εξετάζει την κίνηση των σωμάτων και διαχωρίζεται σε δύο μέρη, την **κινηματική** και τη **δυναμική**. *Η κινηματική εξετάζει και περιγράφει απλώς την κινητική κατάσταση των σωμάτων χωρίς να ενδιαφέρεται για τα αίτια που προκαλούν την κίνηση.* Η κινητική κατάσταση ενός σώματος σε ορισμένη χρονική στιγμή προσδιορίζεται από τη θέση του σώματος και την ταχύτητά του. Επομένως, πρέπει να ξέρουμε ή να βρούμε πώς μεταβάλλονται αυτά τα δύο μεγέθη με το χρόνο. Η κινητική κατάσταση του σώματος εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος για $t = 0$. Ο άλλος κλάδος της μηχανικής, *η δυναμική, ενδιαφέρεται για την αιτιότητα της κίνησης, δηλαδή τί προκαλεί και τί μεταβάλλει την κίνηση των σωμάτων.*

Η μελέτη της κίνησης των σωμάτων απλοποιείται με τη χρήση της έννοιας του **υλικού σημείου**. Με τον όρο αυτό εννοούμε σώμα με σημειακές διαστάσεις. Τα πραγματικά σώματα μπορούν να θεωρηθούν ως υλικά σημεία όταν οι διαστάσεις τους δεν λαμβάνονται υπόψη στο πρόβλημα ή όταν κάνουν μεταφορική κίνηση. Στα επόμενα πάντως και εφόσον δεν δίνουμε άλλη εξήγηση, με τον όρο σώμα θα εννοούμε υλικό σημείο.

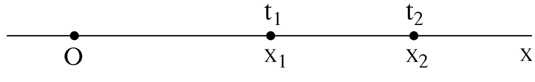
Πρέπει να τονίσουμε ότι η κίνηση σώματος αναφέρεται πάντοτε σε κάποιο **σύστημα αναφοράς** που είναι συνδεδεμένο με κάποιο σώμα ή παρατηρητή που θεωρείται ακίνητος. Συνήθως το σύστημα αναφοράς είναι ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$. Οι συντεταγμένες x, y, z του σώματος καθορίζουν τη θέση του ως προς την αρχή O του συστήματος αναφοράς. Το σύνολο των διαδοχικών θέσεων από τις οποίες περνά το σώμα κατά την κίνησή του αποτελεί την **τροχιά** του.

Όπως θα δούμε παρακάτω, η μελέτη της κίνησης των σωμάτων δείχνει ότι τα διάφορα φυσικά μεγέθη χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Τα **αριθμητικά**

μεγέθη τα οποία ορίζονται πλήρως με την αριθμητική τιμή τους και τα **διανυσματικά μεγέθη** που για να οριστούν χρειάζονται εκτός από την αριθμητική τους τιμή και τη διεύθυνση και τη φορά επενέργειάς τους. Η μάζα, το διάστημα, ο όγκος, η ενέργεια, η θερμοκρασία, ο χρόνος αποτελούν παραδείγματα αριθμητικών μεγεθών. Η μετατόπιση, η δύναμη, η ταχύτητα, η ροπή δύναμης, η ορμή είναι μερικά από τα διανυσματικά μεγέθη. Τα διανυσματικά μεγέθη θα τα συμβολίζουμε με έντονα παχέα στοιχεία. Μία εισαγωγή στις πράξεις μεταξύ των διανυσμάτων υπάρχει στο Παράρτημα Α5.

2.2. Ευθύγραμμη κίνηση - Ταχύτητα

Όταν η τροχιά του σώματος είναι ευθεία, τότε η κίνηση είναι **ευθύγραμμη**. Παίρνουμε την τροχιά κατά μήκος του άξονα x του συστήματος συντεταγμένων (Εικόνα 2.1). Συνήθως θεωρούμε ότι για $t=0$ το σώμα βρίσκεται στην αρχή Ο, που λαμβάνεται και ως αρχή μέτρησης του διαστήματος. Η συντεταγμένη x της θέσης του σώματος, καθορίζει την **μετατόπιση** του από την αρχή σε κάποια χρονική στιγμή, ενώ **διάστημα** είναι το τμήμα της τροχιάς που διαγράφεται από το σώμα σε ορισμένο χρόνο. Πολλές φορές στην ευθύγραμμη κίνηση η μετατόπιση και το διάστημα συμπίπτουν έχοντας την ίδια τιμή. Στην πραγματικότητα πρόκειται για διαφορετικά μεγέθη με κυριότερη διαφορά ότι η μετατόπιση είναι διανυσματικό μέγεθος, ενώ το διάστημα αριθμητικό. Στην ευθύγραμμη κίνηση, επειδή το σώμα βρίσκεται πάντοτε επάνω στην ίδια ευθεία, ο διανυσματικός χαρακτήρας των μεγεθών μετατόπιση, ταχύτητα, επιτάχυνση δεν έχει τόση σημασία. Γίνεται όμως ευκολότερα κατανοητή η φυσική τους σημασία, που διευκολύνει την μελέτη και άλλων μορφών κίνησης.



Εικόνα 2.1. Η τροχιά στην ευθύγραμμη κίνηση.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στη θέση x_1, ενώ τη χρονική στιγμή t_2 η θέση του καθορίζεται από τη συντεταγμένη x_2 (Εικόνα 2.1). Η **μέση ταχύτητα** του σώματος στο χρονικό διάστημα t_2-t_1 ορίζεται ως το πηλίκο

$$\langle \upsilon \rangle^{*} = \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \,, \qquad (2.1)$$

* Το σύμβολο < > υποδηλώνει μέση τιμή του μεγέθους.

όπου $\Delta x = x_2 - x_1$ είναι το διάστημα που διέγραψε στο χρόνο Δt. Το πρόσημο του πηλίκου στη (2.1) καθορίζει και τη φορά της μέσης ταχύτητας, δηλαδή αν το σώμα κινείται κατά τη θετική ή κατά την αρνητική φορά του άξονα x. Είναι φανερό ότι η σχέση (2.1) γράφεται ως

$$x_2 = x_1 + \langle \upsilon \rangle (t_2 - t_1) \ . \tag{2.2}$$

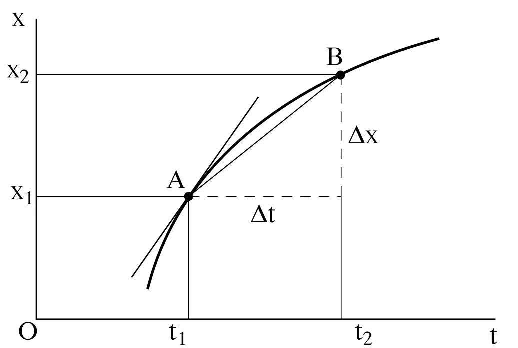
Αν λοιπόν γνωρίζουμε την αρχική θέση x_1 και τη μέση ταχύτητα $\langle \upsilon \rangle$ μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση x_2 του σώματος τη χρονική στιγμή t_2.

Η μέση ταχύτητα είναι ένα μέγεθος χρήσιμο στην καθημερινή μας ζωή, αλλά δεν μας δίνει πληροφορίες για τον τρόπο που κινείται το σώμα στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$. Αν όμως χωρίσουμε το διάστημα Δt σε μικρότερα χρονικά διαστήματα και υπολογίσουμε τη μέση ταχύτητα του σώματος για καθένα από αυτά, τότε η αντίληψη που έχουμε για την κίνηση του σώματος προσεγγίζει την πραγματική κατάσταση, όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των διαστημάτων στο οποίο χωρίζουμε το Δt. Μ' αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε στην έννοια της **στιγμιαίας ταχύτητας**, όταν το χρονικό διάστημα κίνησης του σώματος που θεωρούμε γίνει απειροελάχιστο.

Μαθηματικά η **στιγμιαία ταχύτητα**, ή απλά **ταχύτητα**, δίνει το ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης σε σχέση με το χρόνο και εκφράζεται από τη σχέση

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \ , \tag{2.3}$$

αποτελεί δηλαδή την πρώτη παράγωγο της μετατόπισης $x = x(t)$ ως προς το χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα διάγραμμα μετατόπισης - χρόνου (Εικόνα 2.2) η στιγμαία ταχύτητα είναι η κλίση της καμπύλης $x = x(t)$. Μονάδα μέτρησης της ταχύτητας στο SI είναι το 1 m/s.

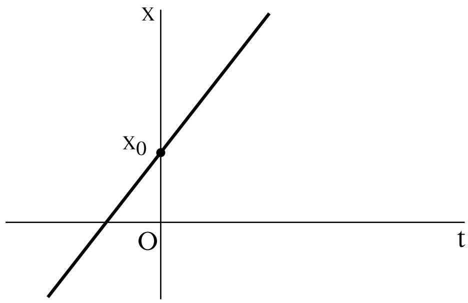


Εικόνα 2.2. Όσο μικρότερο γίνεται το Δt, τόσο το σημείο Β προσεγγίζει στο σημείο Α, ενώ το μήκος της χορδής ΑΒ μικραίνει. Όταν $\Delta t \to 0$, τότε η χορδή παίρνει την οριακή θέση της εφαπτομένης στο Α.

Στην περίπτωση που η ταχύτητα είναι σταθερή, η ευθύγραμμη κίνηση χαρακτηρίζεται ως **ομαλή** και περιγράφεται από τη σχέση

$$x = x_0 + \upsilon t \ , \tag{2.4}$$

όπου x_0 είναι η μετατόπιση για $t = 0$ και x η μετατόπιση τη χρονική στιγμή t. Το διάγραμμα (x, t) είναι ευθεία γραμμή, η κλίση της οποίας είναι η σταθερή ταχύτητα της κίνησης (Εικόνα 2.3).



Εικόνα 2.3. Διάγραμμα μετατόπισης x, χρόνου t, στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Όπως φαίνεται και ο χρόνος και η μετατόπιση μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές, αφού η εκλογή της αρχής O και του χρόνου $t=0$ είναι αυθαίρετη.

Παράδειγμα 2.1. Μελετείστε την κίνηση που κάνει μία πέτρα που ρίχνεται κατακόρυφα προς τα επάνω.

ΛΥΣΗ. Είναι γνωστό ότι αν ρίξουμε μία πέτρα κατακόρυφα προς τα επάνω, θα φθάσει σ' ένα μέγιστο ύψος h και μετά πέφτοντας θα επιστρέψει στο έδαφος. Αν πάρουμε ως αρχή μέτρησης του διαστήματος ένα σημείο επάνω στο έδαφος, είναι φανερό ότι η πέτρα στο χρόνο Δt διάρκειας της κίνησης διέγραψε διάστημα $h+h = 2h$. Η μετατόπισή της όμως είναι μηδέν, αφού στο τέλος της κίνησης βρίσκεται στο σημείο όπου ξεκίνησε ($h-h = 0$). Από εδώ φαίνεται η διαφορά μετατόπισης και διαστήματος. Το ίδιο συμβαίνει και με την ταχύτητα. Η μέση ταχύτητα, θεωρούμενη ως διάνυσμα, είναι μηδέν. Η μέση τιμή όμως της ταχύτητας δεν είναι μηδέν αλλά $\dfrac{2h}{\Delta t}$, αφού το διάστημα είναι $2h$.

2.3. Ευθύγραμμη κίνηση - Επιτάχυνση

Συνήθως η ταχύτητα κίνησης των σωμάτων δεν παραμένει σταθερή. Λέμε τότε ότι το σώμα επιταχύνεται ή έχει επιτάχυνση. *Η επιτάχυνση είναι ένα μέγεθος* *που χαρακτηρίζει το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας με το χρόνο.* Στην ευθύγραμμη κίνηση η **μέση επιτάχυνση** στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ ορίζεται από τη σχέση

$$\langle a \rangle = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \ , \tag{2.5}$$

όπου υ_1 και υ_2 είναι οι τιμές της στιγμιαίας ταχύτητας τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 αντίστοιχα.

Όπως και στην περίπτωση της ταχύτητας, η **στιγμιαία επιτάχυνση** ή απλά **επιτάχυνση** βρίσκεται με την οριακή προσέγγιση

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \ . \tag{2.6}$$

Ώστε η επιτάχυνση δίνεται από την πρώτη παράγωγο της ταχύτητας ως προς το χρόνο ή από τη δεύτερη παράγωγο της μετατόπισης. Το πρόσημο της (2.6) καθορίζει και τη φορά της επιτάχυνσης στη διεύθυνση κίνησης του σώματος. Μονάδα μέτρησης της επιτάχυνσης στο SI είναι το 1 m/s^2.

Στην ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση μπορεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση γενικά να μην έχουν την ίδια φορά ή σε κάποια χρονική στιγμή ένα απ' αυτά τα μεγέθη να έχει τιμή μηδέν. Αυτό δεν σημαίνει ότι παύει η κίνηση του σώματος. Πρέπει να καταλάβουμε ότι αν ένα σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$, αυτό δε σημαίνει ότι είτε η ταχύτητά του, είτε η επιτάχυνσή του είναι μηδέν. Επίσης το σώμα μπορεί να έχει θετική ταχύτητα και την ίδια χρονική στιγμή η επιτάχυνση του να είναι θετική, μηδέν ή αρνητική. Μία άλλη περίπτωση είναι το σώμα σε κάποια χρονική στιγμή να έχει ταχύτητα μηδέν. Η επιτάχυνσή του τότε μπορεί να είναι πάλι θετική, μηδέν ή αρνητική.

Όταν η επιτάχυνση του σώματος είναι σταθερή, η κίνηση χαρακτηρίζεται ως **ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη**. Τότε από την εξίσωση (2.5) προκύπτει ότι

$$\upsilon = \upsilon_0 + a\, t \ , \tag{2.7}$$

όπου υ_0 είναι η ταχύτητα για $t = 0$ και υ η ταχύτητα στο χρόνο t. Επειδή η ταχύτητα μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο, η μέση ταχύτητα του σώματος στο χρονικό διάστημα t είναι

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} \ . \tag{2.8}$$

Τη μέση ταχύτητα μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε στην εξίσωση (2.4) που δίνει τη μετατόπιση για σταθερή ταχύτητα, δηλαδή

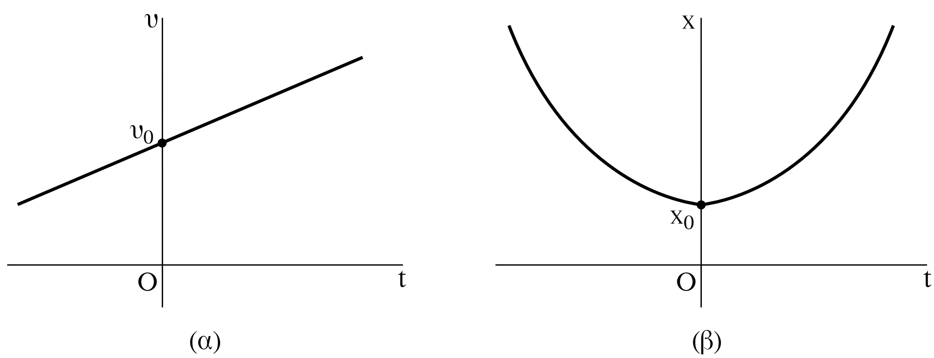
$$x = x_0 + \langle \upsilon \rangle\, t = x_0 + \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} t \ . \tag{2.9}$$

Αντικαθιστώντας την (2.7) στην (2.9) παίρνουμε την εξίσωση της μετατόπισης στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad . \tag{2.10}$$

Στην Εικόνα 2.4 δίνονται τα διαγράμματα ταχύτητας και μετατόπισης (εξισώσεις (2.7) και (2.10)) σε συνάρτηση με το χρόνο για την ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

Ένα κλασικό παράδειγμα ευθύγραμμης κίνησης με σταθερή επιτάχυνση είναι η κατακόρυφη κίνηση των σωμάτων μέσα στο πεδίο βαρύτητας της Γης. Όπως θα δούμε και αργότερα, όλα τα σώματα ανεξάρτητα από τη μάζα τους ή την πυκνότητά τους επιταχύνονται εξαιτίας της βαρυτικής έλξης (βάρος) κατακόρυφα προς τα κάτω με την ίδια σταθερή επιτάχυνση $g = 9{,}80\ \mathrm{m/s^2}$.



Εικόνα 2.4. Στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.
(α) Η γραφική παράσταση της ταχύτητας είναι μία ευθεία.
(β) Η γραφική παράσταση της μετατόπισης είναι μία παραβολή.

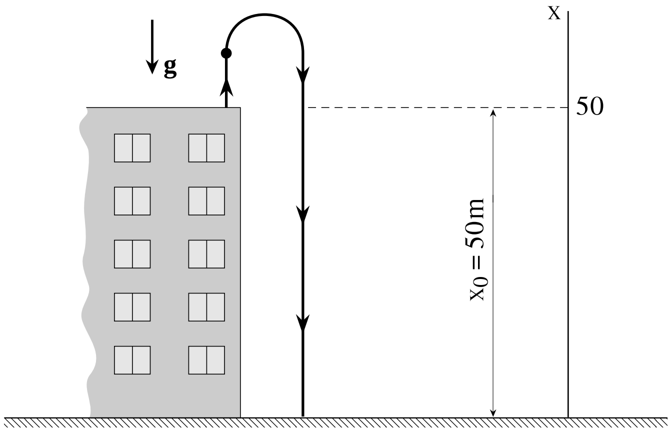
Παράδειγμα 2.2. Από την οροφή κτιρίου ύψους 50 m, ένα σώμα βάλλεται κατακόρυφα προς τα επάνω. Μετά από 5 s το σώμα κτυπά στο έδαφος. Ποια ήταν η αρχική του ταχύτητα, το μέγιστο ύψος στο οποίο έφθασε και με τί ταχύτητα έφθασε στο έδαφος;

ΛΥΣΗ. Παίρνουμε αυθαίρετα την αρχή των συντεταγμένων O στο έδαφος και θεωρούμε τη φορά προς τα επάνω ως τη θετική φορά του άξονα x (Εικόνα 2.5). Αυτή η αυθαίρετη επιλογή δεν πρόκειται να αλλάξει το αποτέλεσμα, πρέπει όμως να πάρουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας με αρνητική τιμή. Έτσι οι εξισώσεις (2.7) και (2.10) γίνονται αντίστοιχα

$$\upsilon = \upsilon_0 - g t \tag{A}$$

και

$$x = x_0 + \upsilon_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad . \tag{B}$$



Εικόνα 2.5. Η κίνηση του σώματος αρχικά είναι ομαλά επιβραδυνόμενη και μετά γίνεται ομαλά επιταχυνόμενη.

Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν και το ανοδικό τμήμα της τροχιάς αλλά και την κάθοδο του σώματος. Για $t = 5$ s το σώμα βρίσκεται στο έδαφος και επομένως $x_\tau = 0$. Από την (Β) λοιπόν έχουμε

$$0 = 50 + \upsilon_0 5 - \frac{1}{2} 9{,}80 \cdot 5^2 ,$$

από όπου βρίσκουμε $\upsilon_0 = 14{,}5$ m/s. Η αρχική ταχύτητα είναι θετική, δηλαδή έχει φορά προς τα επάνω, όπως και πραγματικά συμβαίνει.

Για να βρούμε το μέγιστο ύψος $x_{\alpha\nu}$ πρέπει να προσδιορίσουμε το χρόνο ανόδου $t_{\alpha\nu}$ του σώματος. Το σώμα ανέρχεται μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του. Έτσι από την (Α) βρίσκουμε

$$0 = 14{,}5 - 9{,}80\, t_{\alpha\nu}$$

και συνεπώς $t_{\alpha\nu} = 1{,}48$ s. Αντικαθιστώντας στην (Β) παίρνουμε

$$x_{\alpha\nu} = 50 + 14{,}5 \cdot 1{,}48 - \frac{1}{2} 9{,}80 \cdot 1{,}48^2 = 60{,}73 \text{ m} .$$

Ώστε το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει το σώμα είναι 60,73 m από το έδαφος. Τέλος, η τελική ταχύτητα, υ_τ, του σώματος κατά την άφιξή του στο έδαφος βρίσκεται και πάλι από την (Α) για $t=5$ s

$$\upsilon_\tau = 14{,}5 - 9{,}80 \cdot 5 = -34{,}50 \text{ m/ s} .$$

Η τελική ταχύτητα έχει αρνητική τιμή που δείχνει ότι η φορά της είναι προς τα κάτω. Να σημειώσουμε ότι η μετατόπιση του σώματος είναι

$$\Delta x = x_\tau - x_0 = 0 - 50 = -50 \text{ m} ,$$

ενώ το διάστημα που διέτρεξε

$$\Delta s = (x_{\alpha\nu} - x_0) + (x_{\alpha\nu} - x_\tau) = (60{,}73 - 50) + (60{,}73 - 0) = 10{,}73 + 60{,}73 = 71{,}46 \text{ m} .$$

Παράδειγμα 2.3. Η εξίσωση ευθύγραμμης κίνησης σώματος είναι

$$x = 1+3t^2-t^3 \tag{A}$$

όπου η μετατόπιση x είναι σε m και ο χρόνος t σε s. Να γίνουν τα διαγράμματα μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης και με τη βοήθειά τους να μελετηθεί η κίνηση του σώματος.

ΛΥΣΗ. Η ταχύτητα του σώματος είναι

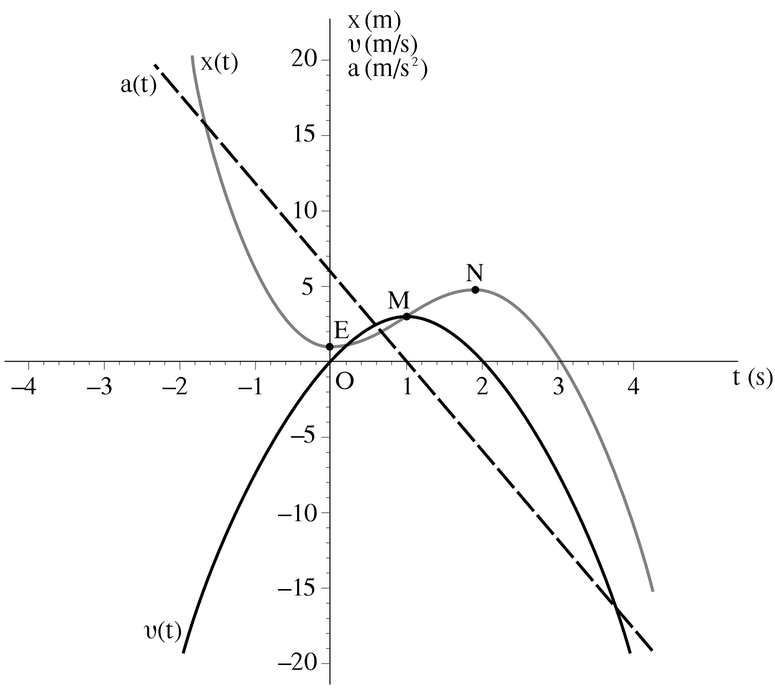
$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = 6t - 3t^2 \tag{B}$$

και η επιτάχυνση

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 6 - 6t \ . \tag{Γ}$$

Παρατηρούμε ότι η μετατόπιση είναι συνάρτηση τρίτου βαθμού του χρόνου, η ταχύτητα δεύτερου βαθμού και η επιτάχυνση πρώτου βαθμού. Συνεπώς το διάγραμμα της ταχύτητας θα είναι μία παραβολή και της επιτάχυνσης μία ευθεία γραμμή.

Στην Εικόνα 2.6 δίνονται σε κοινό σύστημα αξόνων τα διαγράμματα των τριών μεγεθών. Για κάθε μέγεθος ο άξονας των τεταγμένων έχει διαφορετικές



Εικόνα 2.6. Το διάγραμμα δείχνει πώς μεταβάλλεται καθένα από τα μεγέθη x, υ, a με το χρόνο, δείχνει όμως και πώς η μεταβολή της επιτάχυνσης μεταβάλλει την ταχύτητα και πώς η μεταβολή της ταχύτητας μεταβάλλει την μετατόπιση.

μονάδες. Παρατηρούμε ότι πράγματι η επιτάχυνση παριστάνεται από ευθεία γραμμή, οι τιμές της είναι αρχικά θετικές και γίνονται αρνητικές, δηλαδή αλλάζει φορά, μετά τη χρονική στιγμή $t = 1$ s, όπου παρατηρείται μηδενισμός της. Το διάγραμμα της ταχύτητας είναι παραβολή. Για αρνητικές τιμές του χρόνου είναι αρνητική (αντίθετη της θετικής φοράς του άξονα μετατόπισης x), η τιμή της όμως μειώνεται διαρκώς εξαιτίας της θετικής επιτάχυνσης και μηδενίζεται για $t=0$. Στη συνέχεια οι τιμές της ταχύτητας είναι θετικές και γίνεται μέγιστη (σημείο Μ) για $t = 1$ s, όπου μηδενίζεται η επιτάχυνση. Ακολουθεί μείωση της τιμής της, μηδενισμός για $t = 2$ s, όπου αλλάζει και πάλι φορά παίρνοντας αρνητικές τιμές. Τέλος, η μετατόπιση είναι αρχικά θετική, μειώνεται όμως λόγω της αρνητικής ταχύτητας (κίνηση προς την αρχή Ο του άξονα x) όπου για $t=0$ πλησιάζει στην ελάχιστη απόσταση Ε. Ακολούθως το σώμα απομακρύνεται πάλι από το Ο κατά τη θετική φορά και για $t = 2$ s βρίσκεται σε σχετικά μέγιστη απόσταση απ' αυτό (σημείο Ν), αλλά μετά πλησιάζει πάλι το Ο και λίγο μετά από το χρόνο $t = 3$ s η μετατόπιση γίνεται αρνητική και το σώμα απομακρύνεται συνέχεια από το Ο.

2.4. Κίνηση στο χώρο

Γενικά η κίνηση ενός σώματος είναι **καμπυλόγραμμη**, δηλαδή η τροχιά του είναι μία καμπύλη γραμμή στο χώρο. Επομένως, για τον προσδιορισμό των παραμέτρων της κίνησης χρειάζονται και οι τρεις συντεταγμένες των διαφόρων μεγεθών. Αυτό ισοδυναμεί με τριπλασιασμό των εξισώσεων περιγραφής της κίνησης. Έτσι γίνεται αναγκαία η χρήση των διανυσμάτων.

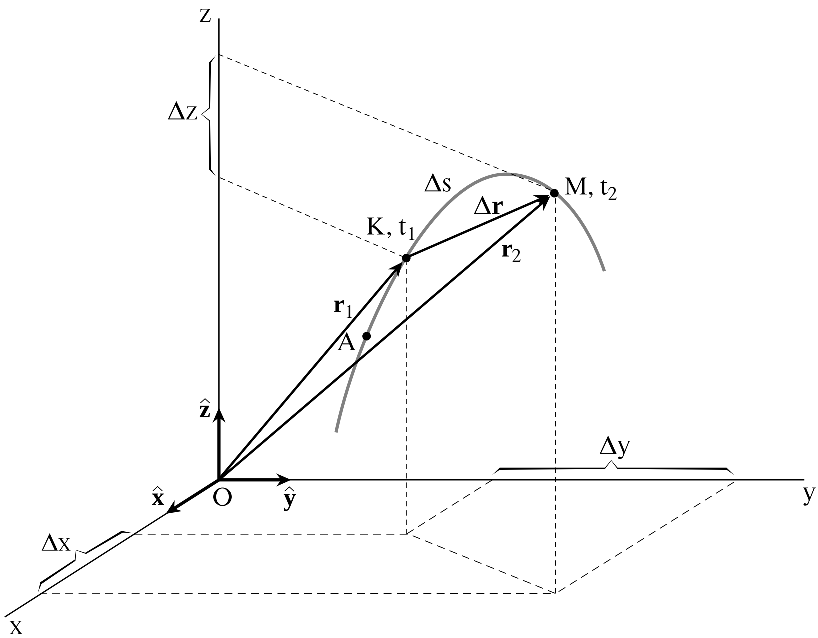
Έστω, λοιπόν, ΑΚΜ η καμπυλόγραμμη τροχιά σώματος, στην οποία το Α το παίρνουμε και ως αρχή μέτρησης των διαστημάτων (Εικόνα 2.7). Γενικά η θέση του σώματος επάνω στην τροχιά του ορίζεται με το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Οι συντεταγμένες του σώματος είναι συναρτήσεις του χρόνου

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{2.11}$$

και συνεπώς

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{x}} + y(t)\,\hat{\mathbf{y}} + z(t)\,\hat{\mathbf{z}} \;. \tag{2.12}$$

Αν για $t=t_1$ και $t=t_2$ τα διανύσματα θέσης του σώματος είναι αντίστοιχα $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ (σημεία Κ και Μ), τότε το σώμα στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ της κίνησής του έχει μετατοπιστεί κατά διάνυσμα $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, ενώ διέγραψε στην τροχιά του το διάστημα Δs. Οι συντεταγμένες του $\Delta\mathbf{r}$ είναι οι ορθές προβολές των Δx, Δy, Δz επάνω στους τρεις άξονες του συστήματος αναφοράς (Εικόνα 2.7).



Εικόνα 2.7. Στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ η μετατόπιση του σώματος είναι $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, ενώ το διάστημα που διέγραψε στην τροχιά του είναι το Δs.

Η μέση διανυσματική ταχύτητα και η μέση αριθμητική ταχύτητα στο χρόνο $\Delta t = t_2 - t_1$ ορίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$<\boldsymbol{\upsilon}> = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \ , \tag{2.13}$$

και

$$<\upsilon> = \frac{\Delta s}{\Delta t} \ . \tag{2.14}$$

Η μέση διανυσματική ταχύτητα δεν έχει φυσική σημασία, η μέση αριθμητική ταχύτητα όμως δίνει τη σταθερή τιμή ταχύτητας που πρέπει να έχει το σώμα, ώστε στο χρόνο Δt να διαγράψει το διάστημα Δs.

Όπως και στην ευθύγραμμη κίνηση έτσι και εδώ μπορούμε να ορίσουμε τις στιγμιαίες ταχύτητες που δίνουν το ρυθμό μεταβολής του αντίστοιχου μεγέθους (μετατόπιση ή διάστημα) σε σχέση με το χρόνο. Έτσι έχουμε

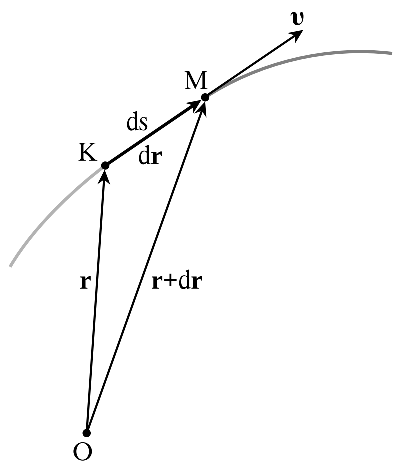
Διανυσματική ταχύτητα $$\boldsymbol{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{2.15}$$

Αριθμητική ταχύτητα $$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \ . \tag{2.16}$$

Η διανυσματική ταχύτητα έχει την οριακή διεύθυνση που παίρνει η μετατόπιση $\Delta\mathbf{r}$ όταν $\Delta t \to 0$, δηλαδή όταν το σημείο Μ τείνει να συμπέσει στο Κ. Η διεύθυνση αυτή είναι η διεύθυνση της εφαπτομένης στο Κ (Εικόνα 2.8). Επειδή η στοιχειώδης χορδή $d\mathbf{r}$ συμπίπτει με το στοιχειώδες τόξο ds της τροχιάς προκύπτει ότι η αριθμητική ταχύτητα υ είναι ίση με την τιμή της διανυσματικής ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon}$, δηλαδή

$$\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon\,\hat{\boldsymbol{\upsilon}} \ , \qquad (2.17)$$

όπου $\hat{\boldsymbol{\upsilon}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της ταχύτητας.



Εικόνα 2.8. Το μέτρο της μετατόπισης $d\mathbf{r}$ είναι ίσο με το διάστημα ds.

Με τη βοήθεια των συντεταγμένων έχουμε ότι

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{\mathbf{y}} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{\mathbf{z}} \ , \qquad (2.18)$$

οπότε $\upsilon_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $\upsilon_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}$, $\upsilon_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}$ είναι οι συντεταγμένες της ταχύτητας.

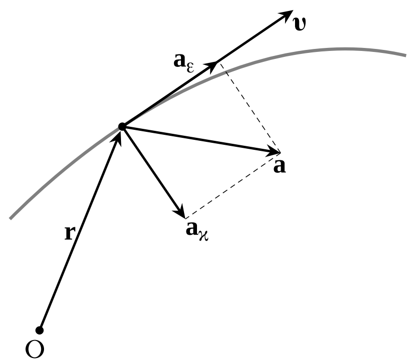
Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας με το χρόνο προσδιορίζεται από την επιτάχυνση $\mathbf{a}$, που και αυτή είναι διανυσματικό μέγεθος

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \ . \qquad (2.19)$$

Οι συντεταγμένες λοιπόν της επιτάχυνσης είναι $a_x(t) = \frac{d\upsilon_x(t)}{dt}$, $a_y(t) = \frac{d\upsilon_y(t)}{dt}$, $a_z(t) = \frac{d\upsilon_z(t)}{dt}$.

Για να καταλάβουμε πώς επιδρά η επιτάχυνση στην ταχύτητα θα θεωρήσουμε κίνηση σε δύο διαστάσεις, η τροχιά δηλαδή του σώματος βρίσκεται επάνω σ' ένα επίπεδο. Σε μία τέτοια περίπτωση μπορούμε να αναλύσουμε το διάνυσμα της επιτάχυνσης σε δύο κάθετες συνιστώσες (Εικόνα 2.9). Η συνιστώσα $\mathbf{a}_\varepsilon$ είναι κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon}$, ονομάζεται **επιτρόχια** ή **εφαπτομενική επιτάχυνση** και είναι αυτή που μεταβάλλει μόνο την τιμή της ταχύτητας. Όπως αποδεικνύεται είναι

$$a_\varepsilon = \frac{d\upsilon}{dt} \quad . \tag{2.20}$$



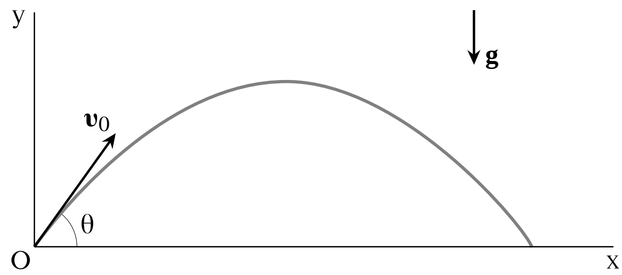
Εικόνα 2.9. Η επιτάχυνση αλλάζει και την τιμή και τη διεύθυνση της ταχύτητας.

Η συνιστώσα $\mathbf{a}_\kappa$ είναι κάθετη στην ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$, ονομάζεται **κάθετη** ή **κεντρομόλος επιτάχυνση** και είναι αυτή που μεταβάλλει μόνο τη διεύθυνση της ταχύτητας. Αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση $\upsilon(t)$, τότε από τη (2.20) και την επιτάχυνση $a(t)$ βρίσκεται ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει τιμή

$$a_\kappa = \sqrt{a^2 - a_\varepsilon^2} \quad . \tag{2.21}$$

Αν υπάρχει μόνο η επιτρόχια επιτάχυνση, η κίνηση είναι **ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη**, ενώ αν υπάρχει μόνο η κεντρομόλος επιτάχυνση η κίνηση είναι **ομαλή κυκλική**.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση σταθερής επιτάχυνσης $\mathbf{a}$. Η κίνηση τότε είναι επίπεδη και η τροχιά του σώματος παραβολική. Για παράδειγμα, τέτοια κίνηση κάνουν τα διάφορα σώματα μέσα στο πεδίο βαρύτητας της Γης κάτω από την επίδραση της σταθερής κατακόρυφης επιτάχυνσης $\mathbf{g}$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ένα σώμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}_0$ και υπό γωνία θ ως προς την οριζόντια διεύθυνση x (Εικόνα 2.10). Μπορούμε να αναλύσουμε την ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}_0$ σε δύο συνιστώσες, την οριζόντια υ_{0x} και την κατακόρυφη υ_{0y}.



Εικόνα 2.10. Τροχιά βλήματος που έχει αρχική ταχύτητα $υ_0$.

Τα πειράματα έχουν δείξει ότι στην κινηματική ισχύει η **αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων**. Όπως θα δούμε, η αρχή αυτή είναι συνέπεια των νόμων της δυναμικής. Θεωρούμε λοιπόν ότι το βλήμα κάνει δύο ανεξάρτητες κινήσεις (δηλαδή η μία δεν επηρεάζει την άλλη), μία οριζόντια με σταθερή ταχύτητα $υ_{0x} = υ_0 συνθ$ και μία κατακόρυφη με αρχική ταχύτητα $υ_{0y} = υ_0 ημθ$ και επιτάχυνση $-g$. Συνεπώς αν για $t=0$ το σώμα βρίσκεται στο O, οι εξισώσεις κίνησής του είναι

$$x = υ_{0x}\, t \ , \qquad υ_x = υ_{0x} \tag{2.22}$$

και

$$y = υ_{0y}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \ , \qquad υ_y = υ_{0y} - g\, t \ . \tag{2.23}$$

Απαλείφοντας το χρόνο ανάμεσα στις εξισώσεις μετατόπισης κατά x και y προκύπτει η εξίσωση της τροχιάς της συνισταμένης κίνησης,

$$y = \frac{υ_{0y}}{υ_{0x}}\, x - \frac{1}{2} \frac{g}{υ_{0x}^2}\, x^2 \tag{2.24}$$

που είναι εξίσωση παραβολής. Πρέπει να πούμε, ότι ανάλογα με το πρόβλημα, η αρχή O δεν είναι απαραίτητο να θεωρείται στο έδαφος και επιπλέον μπορεί να υπάρχουν και αρχικές μετατοπίσεις x_0 και y_0.

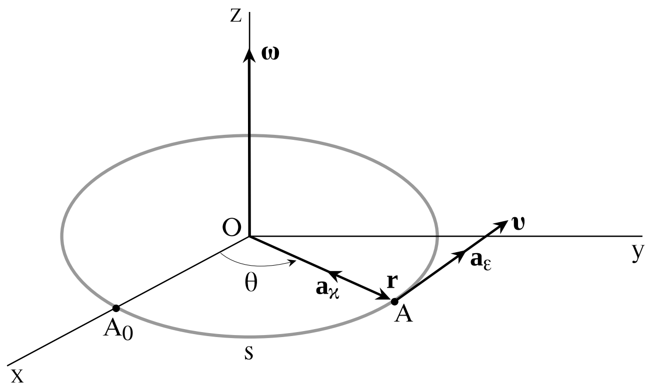
2.5. Κυκλική κίνηση

Η κυκλική κίνηση είναι μία επίπεδη καμπυλόγραμμη κίνηση στην οποία η τροχιά του σώματος είναι περιφέρεια κύκλου. Η θέση A του σώματος καθορίζεται από την ακτίνα r του κύκλου και τη γωνία θ (Εικόνα 2.11), που ονομάζονται πολικές συντεταγμένες. Οι ορθογώνιες (καρτεσιανές) συντεταγμένες συνδέονται με τις πολικές με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= r\ συνθ \\ y &= r\ ημθ \end{aligned} \ . \tag{2.25}$$

Συνεπώς το διάνυσμα θέσης είναι

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} = r\,\text{συν}\theta\,\hat{\mathbf{x}} + r\,\text{ημ}\theta\,\hat{\mathbf{y}} \quad . \tag{2.26}$$



Εικόνα 2.11. Το σύστημα πολικών και καρτεσιανών συντεταγμένων στην κυκλική κίνηση.

Η γωνία θ είναι συνάρτηση του χρόνου και ο ρυθμός μεταβολής της, $d\theta/dt$, εκφράζει τη γωνιακή ταχύτητα ω. Η **γωνιακή ταχύτητα** είναι διανυσματικό μέγεθος, το οποίο εκτός από τη μεταβολή της γωνίας θ καθορίζει και τη φορά διαγραφής της, δηλαδή τη φορά κίνησης του σώματος επάνω στην κυκλική τροχιά του. Αυτό γίνεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού, γι’ αυτό η γωνιακή ταχύτητα έχει τη διεύθυνση του άξονα z

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{\mathbf{z}} \quad . \tag{2.27}$$

Μπορούμε να ορίσουμε και **γωνιακή επιτάχυνση**, αν υπάρχει, που είναι το διανυσματικό μέγεθος

$$\boldsymbol{\omega}' = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\,\hat{\mathbf{z}} \quad . \tag{2.28}$$

Η γωνιακή ταχύτητα μετριέται σε rad/ s και η γωνιακή επιτάχυνση σε rad/ s^2, γιατί η γωνία θ είναι αδιάστατο μέγεθος.

Η τιμή της ταχύτητας του σώματος είναι η παράγωγος του διαστήματος s

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\,\frac{d\theta}{dt} = r\omega \quad . \tag{2.29}$$

Αν λάβουμε υπόψη μας τη φορά και την αμοιβαία καθετότητα των διανυσμάτων $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{r}$, και $\boldsymbol{\upsilon}$, φαίνεται ότι

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad . \tag{2.30}$$

Παραγωγίζοντας βρίσκουμε την επιτάχυνση

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{υ}}{dt} = \frac{d\mathbf{ω}}{dt} \times \mathbf{r} + \mathbf{ω} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{ω}' \times \mathbf{r} + \mathbf{ω} \times \mathbf{υ} \quad . \tag{2.31}$$

Ο πρώτος όρος εκφράζει την εφαπτομενική επιτάχυνση $\mathbf{a}_ε$, που έχει τιμή $a_ε = ω'r$, γιατί τα διανύσματα $\mathbf{ω}'$, $\mathbf{r}$ είναι κάθετα. Ομοίως η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει τιμή $a_κ = ωυ = ω(rω) = ω^2 r = \frac{υ^2}{r}$ και διευθύνεται προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς ($\mathbf{a}_κ = -ω^2\,\mathbf{r}$).

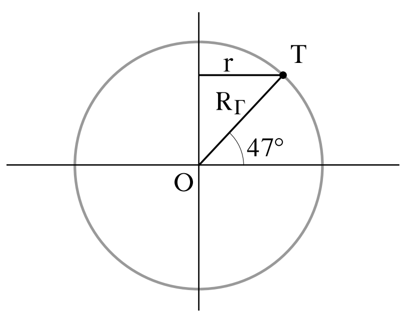
Όταν η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή ($ω'=0$), δεν υπάρχει η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης ($a_ε=0$) παρά μόνο η κεντρομόλος επιτάχυνση $a_κ$, που και αυτή είναι σταθερή. Στην περίπτωση αυτή η γραμμική ταχύτητα $\mathbf{υ}$ έχει σταθερό μέτρο, αλλάζει όμως διαρκώς η διεύθυνσή της εξαιτίας της $a_κ$. Η κυκλική κίνηση τότε ονομάζεται **ομαλή** και χαρακτηρίζεται από τη σταθερή χρονική περίοδο περιστροφής, Τ. Ο αριθμός των περιστροφών στη μονάδα του χρόνου ονομάζεται **συχνότητα** f και μετριέται σε κύκλους ανά δευτερόλεπτο (c/s) που λέγονται Hertz (Hz). Τα τρία μεγέθη ω, Τ, f συνδέονται με τη σχέση

$$ω = \frac{2π}{T} = 2πf \quad , \tag{2.32}$$

όπου $f = \frac{1}{T}$. Στην ομαλή κυκλική κίνηση είναι $θ = ωt$.

Παράδειγμα 2.4. Ένας τόπος βρίσκεται σε γεωγραφικό πλάτος 47° Βόρειο. Είναι γνωστό ότι η ακτίνα της Γης είναι περίπου 6.380 km. Με ποια ταχύτητα κινείται ο τόπος αυτός εξαιτίας της περιστροφής της Γης;

ΛΥΣΗ. Ο τόπος Τ βρίσκεται επάνω σε ένα μικρό κύκλο της Γης ακτίνας r (Εικόνα 2.12) και περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα υ εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση.



Εικόνα 2.12. Ο τόπος Τ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

Από τη σχέση (2.29) έχουμε

$$υ = r\,ω = R_Γ\,συν47°(2πf) \quad . \tag{A}$$

Η συχνότητα f περιστροφής της Γης είναι όμως

$$f = \frac{1 \text{ περιστροφή}}{(24)\ (3.600\ \text{s})}\ . \qquad \text{(Β)}$$

Αντικαθιστώντας την (Β) στην (Α) έχουμε

$$\upsilon = (6.380 \cdot 10^3 \text{m})\ (\text{συν}47°)\ (2\pi) \left(\frac{1}{(24)\ (3.600\ )}\right) = 316\ \text{m/s} \qquad \text{(Γ)}$$

που είναι η ταχύτητα με την οποία κινείται ο τόπος.

Παράδειγμα 2.5. Μία φυγοκεντρική μηχανή που χρησιμοποιείται για το διαχωρισμό και τη μελέτη μορίων πρωτεϊνών έχει ακτίνα 3 cm και περιστρέφεται με συχνότητα 100.000 c/min. Ποια είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση που υφίσταται ένα δείγμα σ′ αυτή τη μηχανή, εκφρασμένη σε πολλαπλάσιο της επιτάχυνσης της βαρύτητας g (g=9,80 m/s^2);

ΛΥΣΗ. Όπως γνωρίζουμε για την κεντρομόλο επιτάχυνση ισχύει

$$a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r} = r\ \omega^2 = r\ (2\pi f)^2 = (0{,}03\text{m})\ (2\pi)^2 \left(\frac{10^5}{60\ \text{s}}\right)^2 . \qquad \text{(Α)}$$

Επομένως

$$\frac{a_\kappa}{g} = \frac{(0{,}03\text{m})\ (2\pi)^2\ (10^{10})}{(9{,}8\text{m/ s}^2)\ (60\ \text{s})^2} = 336.000 \qquad \text{(Β)}$$

Άρα, η κεντρομόλος επιτάχυνση ενός δείγματος σ’ αυτή τη μηχανή είναι 336.000 φορές η επιτάχυνση της βαρύτητας g.