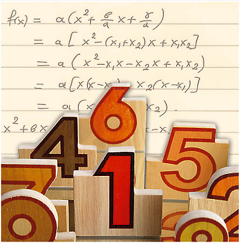
Θανάση Π. Ξένου



ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

• Θεωρία • Παραδείγματα • Ασκήσεις με υποδείξεις - απαντήσεις
• Διαγωνίσματα • Λύσεις ασκήσεων σχολικού βιβλίου

ΠΕΡΙΕΧΕΙ CD ROM

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Με το συγγραφέα επικοινωνείτε:
Τηλ. 2310.348.086, e-mail: thanasisxenos@yahoo.gr

ISBN 978-960-456-212-1

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210.3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60, 114 71 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό είναι γραμμένο με βάση την αναμορφωμένη έκδοση του σχολικού βιβλίου Άλγεβρας της Α′ τάξης του Γενικού Λυκείου, που θα διδάσκεται από το σχολικό έτος 2010-2011.

Είναι ένα σημαντικό βοήθημα για τους μαθητές, αλλά και οι συνάδελφοι καθηγητές θα βρουν πλούσιο υλικό για το έργο τους.

✓ Κάθε ενότητα περιλαμβάνει:

- **Θεωρία**, γραμμένη με κάθε λεπτομέρεια.
- **Παραδείγματα και εφαρμογές** για όλες τις περιπτώσεις.
- **Ασκήσεις Α′ και Β′ ομάδας**

✓ Στο τέλος κάθε κεφαλαίου δίνονται:

- **Ερωτήσεις κατανόησης** (Σωστού-Λάθους, πολλαπλής επιλογής, συμπλήρωσης κενού, αντιστοίχισης και σύντομης απάντησης)
- **Γενικές ασκήσεις,** κυρίως για μαθητές με αυξημένο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά.
- **Διαγώνισμα** με τέσσερα αντιπροσωπευτικά θέματα.

✓ Τα κεφάλαια που αναπτύσσονται είναι:

Εισαγωγικό κεφάλαιο: Το λεξιλόγιο της Λογικής – Σύνολα.

Κεφάλαιο 1: Οι πραγματικοί αριθμοί (ιδιότητες πράξεων, διάταξη, απόλυτη τιμή, ρίζες)

Κεφάλαιο 2: Εξισώσεις (Εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού, διώνυμη εξίσωση).

Κεφάλαιο 3: Ανισώσεις (Ανισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού, ανισώσεις γινόμενο, ανισώσεις πηλίκο).

Κεφάλαιο 4: Βασικές έννοιες των συναρτήσεων (Η έννοια της συνάρτησης, γραφική παράσταση συνάρτησης, μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης, άρτιες και περιττές συναρτήσεις).

Κεφάλαιο 5: Μελέτη των βασικών συναρτήσεων

$f(x) = \alpha x^2, \quad g(x) = \frac{\alpha}{x} \quad$ και $\quad h(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0.$

Κεφάλαιο 6: Συστήματα (γραμμικά 2×2, 3×3 και μη γραμμικά).

Κεφάλαιο 7: Τριγωνομετρία (τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας, τριγωνομετρικές ταυτότητες και αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο)

✓ Στο τέλος του βιβλίου γίνεται μια επανάληψη με όλη τη θεωρία σε ερωτήσεις και κατάλληλα επιλεγμένες επαναληπτικές ασκήσεις.

Το βιβλίο **συνοδεύεται από CD**, το οποίο περιέχει:

- **Απαντήσεις** ή **υποδείξεις** για όλες τις ερωτήσεις και ασκήσεις του παρόντος βιβλίου.
- **Λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου**.

Με ευχαρίστηση θα δεχθώ οποιαδήποτε υπόδειξη που θα μπορούσε να συμβάλλει στη βελτίωση αυτού του βιβλίου.

Ιούνιος 2010

Θανάσης Ξένος

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο: Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο: Συστήματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο: Τριγωνομετρία

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Ε.1 Το λεξιλόγιο της Λογικής

Η συνεπαγωγή

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, έτσι ώστε, αν αληθεύει ο P να αληθεύει και ο Q, τότε λέμε ότι **ο P συνεπάγεται τον Q** και συμβολικά γράφουμε $\mathbf{P \Rightarrow Q}$.

Ο ισχυρισμός «$\mathbf{P \Rightarrow Q}$» ονομάζεται **συνεπαγωγή**, ο P ονομάζεται **υπόθεση** της συνεπαγωγής και ο Q **συμπέρασμα** αυτής. Ο συμβολισμός $\mathbf{P \Rightarrow Q}$ διαβάζεται επίσης «**αν P, τότε Q**».

συνεπαγωγή:	**P**	$\Rightarrow$	**Q**
	(υπόθεση)		**(συμπέρασμα)**

Για παράδειγμα, έχουμε

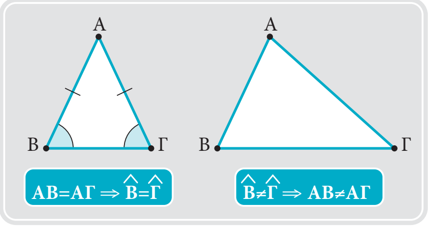
1) $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

2) $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$

3) $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$

Αν αληθεύει η συνεπαγωγή «$P \Rightarrow Q$», τότε αληθεύει και η συνεπαγωγή «όχι $Q \Rightarrow$ όχι P», που είναι γνωστή ως **νόμος της αντιθετοαντιστροφής**. Πράγματι, αν δεν αληθεύει ο ισχυρισμός Q, τότε δεν μπορεί να αληθεύει και ο P.

Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι, αν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, τότε έχει δύο γωνίες ίσες. Επίσης, αν ένα τρίγωνο δεν έχει δύο γωνίες ίσες, τότε δεν είναι ισοσκελές.



Η ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

Αν αληθεύουν συγχρόνως οι συνεπαγωγές

$$P \Rightarrow Q \quad \text{και} \quad Q \Rightarrow P,$$

τότε λέμε ότι **ο P είναι ισοδύναμος με τον Q** και συμβολικά γράφουμε $P \Leftrightarrow Q$. Ο ισχυρισμός «$P \Leftrightarrow Q$» ονομάζεται **ισοδυναμία** και διαβάζουμε «**P ισοδυναμεί Q**» *ή* «**P αν και μόνο αν Q**».

$$\mathbf{P \Leftrightarrow Q \quad \text{σημαίνει} \quad P \Rightarrow Q \quad \text{και} \quad Q \Rightarrow P}$$

Αν ισχύει μια συνεπαγωγή $P \Rightarrow Q$, δε σημαίνει ότι ισχύει και η **αντίστροφη συνεπαγωγή** $Q \Rightarrow P$.

Για παράδειγμα, ενώ ισχύει η συνεπαγωγή

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2,$$

αν έχουμε $\alpha^2 = \beta^2$, τότε δε σημαίνει απαραίτητα ότι $\alpha = \beta$, αφού μπορεί να είναι $\alpha = -\beta$.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα ισοδυναμιών είναι τα παρακάτω.

1) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

2) $\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta} \Leftrightarrow \alpha = \beta$

3) $\alpha^2 = \beta^2 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ *ή* $\alpha = -\beta$

4) $\alpha^3 = \beta^3 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

5) Ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, αν και μόνο αν οι γωνίες του είναι ίσες.

Διάζευξη και σύζευξη ισχυρισμών

- Αν αληθεύει ένας τουλάχιστον από τους ισχυρισμούς P και Q, τότε λέμε ότι αληθεύει ο ισχυρισμός «**P *ή* Q**», που λέγεται **διάζευξη των P και Q**.

  Τέτοια παραδείγματα είναι τα εξής:

  1) $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ *ή* $\beta = 0$

  2) $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ *ή* $x = -2$

  3) $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ *ή* $\beta \neq 0$

  4) $x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ή* $x = 1$.

- Αν αληθεύουν συγχρόνως δύο ισχυρισμοί P και Q, τότε λέμε ότι αληθεύει ο ισχυρισμός «**P** ***και*** **Q**», που λέγεται **σύζευξη των P και Q**.

  Τέτοια παραδείγματα είναι τα εξής:

  1) $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ *και* $\beta \neq 0$

  2) $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ *και* $\beta = 0$

  3) $\alpha^2 \neq \beta^2 \Leftrightarrow \alpha \neq \beta$ *και* $\alpha \neq -\beta$

  4) $x^2 = 1$ *και* $x > 0 \Leftrightarrow x = 1$

  5) $\alpha^2 = \beta^2$ *και* $\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

- Η άρνηση του ισχυρισμού «P *ή* Q» είναι ο ισχυρισμός «όχι P και όχι Q», ενώ η άρνηση του ισχυρισμού «P και Q» είναι ο ισχυρισμός «όχι P ή όχι Q».

  Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός $\alpha\beta = 0$ σημαίνει $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$, ενώ ο ισχυρισμός $\alpha\beta \neq 0$ σημαίνει $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.

Ερωτήσεις κατανόησης

1. *Χαρακτήρισε με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) καθεμιά από τις παρακάτω συνεπαγωγές και ισοδυναμίες.*

α) ☐ $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

β) ☐ $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$

γ) ☐ $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$

δ) ☐ $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^3 = \beta^3$

ε) ☐ $\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ *ή* $\beta \neq 0$

στ) ☐ $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ *ή* $\beta = 0$

ζ) ☐ $(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ *ή* $x = 2$ *ή* $x = 3$

η) ☐ $\alpha < 1 \Rightarrow \alpha^2 < 1$

θ) ☐ $(\alpha - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$

ι) ☐ $x < 1$ *και* $y < 1 \Rightarrow xy < 1$

ια) ☐ $x^2 < 1 \Leftrightarrow x < 1$

ιβ) ☐ $x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 0$ *ή* $x = 2$

ιγ) ☐ $x^2 \neq 3x \Rightarrow x \neq 3$

2. Από τις συνεπαγωγές $P \Rightarrow Q$ και $Q \Rightarrow R$, προκύπτει η συνεπαγωγή $P \Rightarrow R$;

3. Γράψε την άρνηση για καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις.

α) $x \neq 2$ *και* $y \neq 3$ ....

β) $x = 1$ *ή* $y = 3$ ....

γ) $\alpha > 0$ *ή* $\beta > 0$ ....

δ) $\alpha \geq 0$ *και* $\beta \leq 0$. ....

4. Εξήγησε γιατί ισχύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές και ισοδυναμίες.

α) $\alpha > 2 \Rightarrow \alpha + 1 > 2$

β) $\alpha^2 = \beta^2$ *και* $\alpha\beta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta$

γ) $\alpha =$ φυσικός αριθμός $\Rightarrow$ $\alpha =$ ακέραιος αριθμός

δ) $(\alpha-2)^2 + (\beta+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 2$ *ή* $\beta \neq -1$.

5. Βρες όλες τις ισοδυναμίες που υπάρχουν ανάμεσα σ' έναν ισχυρισμό του πίνακα Α′ και σ' έναν ισχυρισμό του πίνακα Β′.

	Πίνακας Α′
α)	$x^2 - x = 0$
β)	$x^2 \neq x$
γ)	$\alpha^2 = 1$ *και* $\alpha < 0$
δ)	$x^2 = 4$ *και* $x(x-2) = 0$
ε)	$(x-1)^2 > 0$

	Πίνακας Β′
1)	$x \neq 1$
2)	$x = 2$
3)	$x = 0$ *ή* $x = 1$
4)	$\alpha = -1$

2.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

- Μια εξίσωση της μορφής **$\alpha x+\beta=0$** επιλύεται ως εξής:
  Η εξίσωση γράφεται $\alpha x=-\beta$.

  i) Αν $\alpha\neq 0$, τότε έχει ακριβώς μια λύση (ή ρίζα), την $x=\dfrac{-\beta}{\alpha}$.

  ii) Αν $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη (δεν έχει καμιά λύση).

  iii) Αν $\alpha=0$ και $\beta=0$, η εξίσωση επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό x (είναι ταυτότητα ή αόριστη).

- Αν στην εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ οι συντελεστές α και β δεν είναι συγκεκριμένοι αριθμοί, αλλά γράμματα, τότε η εξίσωση αυτή ονομάζεται **παραμετρική** και τα γράμματα ονομάζονται **παράμετροι**. Η διαδικασία για την εύρεση του πλήθους των ριζών της εξίσωσης, ονομάζεται **διερεύνηση**.

  Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την εξίσωση

  $$\lambda^2(x-2)-3\lambda=x+1,\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

  με παράμετρο λ.

  Η εξίσωση γράφεται

  $$\lambda^2x-2\lambda^2-3\lambda=x+1 \Leftrightarrow \lambda^2x-x=2\lambda^2+3\lambda+1$$
  $$\Leftrightarrow x(\lambda^2-1)=2\lambda^2+3\lambda+1 \Leftrightarrow x(\lambda-1)(\lambda+1)=2\lambda^2+3\lambda+1.$$

  - Αν $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq -1$, η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, την

    $$x=\frac{2\lambda^2+3\lambda+1}{(\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{(2\lambda^2+2\lambda)+(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{2\lambda(\lambda+1)+(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)}$$
    $$=\frac{(\lambda+1)(2\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{2\lambda+1}{\lambda-1}.$$

  - Αν $\lambda=1$, η εξίσωση γράφεται $0x=6$ και είναι αδύνατη.
  - Αν $\lambda=-1$, η εξίσωση γράφεται $0x=0$ και είναι ταυτότητα.

Πολλές εξισώσεις, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού.

- Οι **εξισώσεις με βαθμό $\nu \geq 2$** λύνονται με παραγοντοποίηση του 1ου μέλους και χρήση της ιδιότητας

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad ή \quad \beta = 0.$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση $x^3 = 9x$ γράφεται

$$x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-9) = 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+3) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \;\; ή \;\; x = 3 \;\; ή \;\; x = -3.$$

- Μια **κλασματική εξίσωση** λύνεται με απαλοιφή παρονομαστών, αφού γίνουν και οι απαιτούμενοι περιορισμοί.

Για παράδειγμα, θα λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{5-x^2}{1-x^2},$$

η οποία γράφεται

$$\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{x^2-5}{(x-1)(x+1)}$$

και ορίζεται όταν $x \neq 1$ και $x \neq -1$.

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $(x-1)(x+1)$, οπότε η εξίσωση γράφεται

$$(x-1)(x+1)\cdot\frac{3}{x+1} - (x-1)(x+1)\cdot\frac{2}{x-1} = (x-1)(x+1)\cdot\frac{x^2-5}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1) - 2(x+1) = x^2 - 5 \Leftrightarrow 3x - 3 - 2x - 2 = x^2 - 5$$
$$\Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ή \quad x = 1.$$

Αλλά, η λύση $x=1$ απορρίπτεται. Άρα, η εξίσωση έχει λύση μόνο την $x=0$.

- Για να λύσουμε μια εξίσωση της μορφής **$|f(x)| = |g(x)|$**, όπου $f(x)$, $g(x)$ παραστάσεις με τον άγνωστο x, εφαρμόζουμε την ιδιότητα

$$|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \beta \quad ή \quad \alpha = -\beta.$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση $|3x-5| = |2x+1|$ γράφεται

$$3x - 5 = 2x + 1 \quad ή \quad 3x - 5 = -2x - 1$$
$$\Leftrightarrow 3x - 2x = 5 + 1 \quad ή \quad 3x + 2x = 5 - 1$$
$$\Leftrightarrow x = 6 \quad ή \quad x = \frac{4}{5}.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να λυθεί και μια εξίσωση της μορφής **$|f(x)| = g(x)$**, με τον περιορισμό $g(x) \geq 0$.

Σχόλιο:

Όταν ζητείται η επίλυση μιας εξίσωσης με άγνωστο τον x, δε σημαίνει ότι η εξίσωση αυτή είναι μια ισότητα που αληθεύει, αλλά ζητάμε να βρούμε τον άγνωστο x, ώστε να αληθεύει η ισότητα.

Γι' αυτό, η επίλυση μιας εξίσωσης αποτελείται από **ισοδύναμα βήματα** και επομένως ο σωστός συμβολισμός ανάμεσα στα διαδοχικά βήματα είναι «$\Leftrightarrow$» και όχι «$\Rightarrow$».

Φυσικά, το ίδιο συμβαίνει και με την επίλυση ανισώσεων και συστημάτων.

Παραδείγματα και εφαρμογές

1.

Να λυθεί η εξίσωση $\lambda^2(\lambda x-1)-4\lambda(x+1)=4$, για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ.

Λύση:

Η εξίσωση γράφεται:

$$\lambda^3x-\lambda^2-4\lambda x-4\lambda=4 \Leftrightarrow \lambda^3x-4\lambda x=\lambda^2+4\lambda+4$$
$$\Leftrightarrow \lambda x(\lambda^2-4)=(\lambda+2)^2 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2)(\lambda+2)x=(\lambda+2)^2$$

- Αν $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 2$ και $\lambda\neq -2$, η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, την
$$x=\frac{(\lambda+2)^2}{\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)}=\frac{\lambda+2}{\lambda(\lambda-2)}.$$
- Αν $\lambda=0$, η εξίσωση γράφεται $0x=4$ και είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda=2$, η εξίσωση γράφεται $0x=16$ και είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda=-2$, η εξίσωση γράφεται $0x=0$ και είναι ταυτότητα.

2.

Να διερευνηθεί και να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{\lambda x-\mu}{3}+\frac{1}{2}x=\lambda-\frac{x}{3},$$

με παραμέτρους $\lambda, \mu\in\mathbb{R}$.

Λύση:

Κάνουμε, πρώτα, απαλοιφή παρονομαστών και η εξίσωση γράφεται:

$$6\cdot\frac{\lambda x-\mu}{3}+6\cdot\frac{1}{2}x=6\lambda-6\cdot\frac{x}{3} \Leftrightarrow 2(\lambda x-\mu)+3x=6\lambda-2x$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda x-2\mu+3x=6\lambda-2x \Leftrightarrow 2\lambda x+3x+2x=2\mu+6\lambda$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda x+5x=2\mu+6\lambda \Leftrightarrow (2\lambda+5)x=2\mu+6\lambda \qquad (1)$$

- Η **(1)** έχει ακριβώς μια λύση, όταν $2\lambda+5\neq 0$, δηλαδή $\lambda\neq-\frac{5}{2}$.

  Η λύση της τότε είναι η $x=\dfrac{2\mu+6\lambda}{2\lambda+5}$.

- Η **(1)** είναι αδύνατη, όταν $2\lambda+5=0$ και $2\mu+6\lambda\neq 0$, δηλαδή

$$\lambda=-\frac{5}{2} \quad \text{και} \quad 2\mu+6\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda=-\frac{5}{2} \quad \text{και} \quad 2\mu-15\neq 0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{5}{2} \quad \text{και} \quad \mu\neq\frac{15}{2}.$$

- Η **(1)** είναι ταυτότητα, όταν $2\lambda+5=0$ και $2\mu+6\lambda=0$, δηλαδή

$$\lambda=-\frac{5}{2} \quad \text{και} \quad \mu=\frac{15}{2}.$$

3.

Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^3-x^2=x-1$ **β)** $x^3-3x^2-4x+12=0$ **γ)** $(x^2-4)^2=(x^2+4x+4)(5x+4)$

Λύση:

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος και κάνουμε παραγοντοποίηση.

α) $x^3-x^2-x+1=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)-(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$.

β) $x^3-3x^2-4x+12=0 \Leftrightarrow x^2(x-3)-4(x-3)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-4)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=2$ ή $x=-2$.

γ) $[(x-2)(x+2)]^2=(x+2)^2(5x+4) \Leftrightarrow (x-2)^2(x+2)^2-(x+2)^2(5x+4)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2\cdot[(x-2)^2-(5x+4)]=0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2-4x+4-5x-4)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2(x^2-9x)=0 \Leftrightarrow (x+2)^2\cdot x(x-9)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=0$ ή $x=9$.

4.

Να λυθούν οι κλασματικές εξισώσεις:

α) $\dfrac{1}{x^2+4x+4}=\dfrac{3}{x+2}$ **και** **β)** $\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{x}}+\dfrac{1}{\dfrac{x}{3}-1}-\dfrac{2}{\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}}=2$

Λύση:

α) Η εξίσωση γράφεται $\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{3}{x+2}$ και ορίζεται για κάθε $x\neq -2$.

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της με $(x+2)^2$ και έχουμε:

$$(x+2)^2\cdot\frac{1}{(x+2)^2}=(x+2)^2\cdot\frac{2}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow 1=2(x+2)\Leftrightarrow 2x+4=1\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}.$$

β) Κάνουμε ομώνυμα σε κάθε παρονομαστή και απλά τα σύνθετα κλάσματα.

$$\frac{1}{\dfrac{x+3}{x}}+\frac{1}{\dfrac{x-3}{3}}-\frac{2}{\dfrac{x^2-9}{3x}}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+3}+\frac{3}{x-3}-\frac{6x}{(x-3)(x+3)}=2 \quad (x\neq 3,\ x\neq -3 \text{ και } x\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3)\cdot\frac{x}{x+3}+(x-3)(x+3)\cdot\frac{3}{x-3}-(x-3)(x+3)\frac{6x}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=2(x-3)(x+3)\Leftrightarrow x(x-3)+3(x+3)-6x=2(x^2-9)$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+3x+9-6x=2x^2-18\Leftrightarrow x^2+9-6x-2x^2+18=0$$

$$\Leftrightarrow -x^2-6x+27=0\Leftrightarrow x^2+6x-27=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=36+108=144$

και λύσεις $x_1=\dfrac{-6+12}{2}=3$ και $x_2=\dfrac{-6-12}{2}=-9$.

Δεκτή, όμως, είναι μόνο η λύση $x=-9$.

5.

Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $|3x-2|=1$ **β)** $|2x-1|=3x-7$ **γ)** $2|x+3|-5|x-1|=0$ **και**

δ) $\big|2-|x+1|\big|=|x|$.

Λύση:

α) $|3x-2|=1 \Leftrightarrow 3x-2=1$ *ή* $3x-2=-1 \Leftrightarrow 3x=3$ *ή* $3x=1 \Leftrightarrow x=1$ *ή* $x=\frac{1}{3}$.

β) Για να έχει λύση η εξίσωση αυτή, πρέπει $3x-7\geq 0$, δηλαδή $x\geq\frac{7}{3}$.
Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$$2x-1=3x-7 \quad ή \quad 2x-1=-3x+7$$

$$\Leftrightarrow 2x-3x=1-7 \quad ή \quad 2x+3x=-1+7 \Leftrightarrow x=6 \quad ή \quad x=\frac{6}{5}.$$

Από τις λύσεις αυτές μόνο η $x=6$ είναι δεκτή, γιατί μόνο αυτή ικανοποιεί τον περιορισμό $x\geq\frac{7}{3}$.

γ) $2|x+3|=5|x-1| \Leftrightarrow 2(x+3)=5(x-1)$ *ή* $2(x+3)=-5(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x+6=5x-5$ *ή* $2x+6=-5x+5 \Leftrightarrow x=\frac{11}{3}$ *ή* $x=\frac{-1}{7}$.

δ) $\big|2-|x+1|\big|=|x| \Leftrightarrow 2-|x+1|=x$ *ή* $2-|x+1|=-x$

$\Leftrightarrow |x+1|=2-x$ **(1)** *ή* $|x+1|=2+x$ **(2)**

- Η **(1)** έχει λύση όταν $2-x\geq 0$, δηλαδή $x\leq 2$. Τότε έχουμε:

  (1) $\Leftrightarrow x+1=2-x$ *ή* $x+1=-2+x \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ *ή* $1=-2$ (αδύνατη).

- Η **(2)** έχει λύση όταν $2+x\geq 0$, δηλαδή $x\geq -2$. Τότε έχουμε:

  (2) $\Leftrightarrow x+1=2-x$ *ή* $x+1=-2-x \Leftrightarrow 1=2$ (αδύνατη) *ή* $x=-\frac{3}{2}$.

Άρα, η εξίσωση έχει λύσεις τις $x_1=\frac{1}{2}$ και $x_2=-\frac{3}{2}$.

6.

Να λυθεί η εξίσωση $|x+2|-2|x-1|=1$.

Λύση:

(Θα εργαστούμε όπως στο παράδειγμα 5 της § 1.3).

Στο διπλανό πίνακα δίνεται το πρόσημο των $x+2$ και $x-1$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	

- Αν $x<-2$, τότε

  $|x+2|=-x-2$ και $|x-1|=-x+1$,

  οπότε η εξίσωση γράφεται

  $$(-x-2)-2(-x+1)=1 \Leftrightarrow -x-2+2x-2=1 \Leftrightarrow x=5$$

  και η λύση αυτή απορρίπτεται, αφού εξαρχής πήραμε $x<-2$.

- Αν $-2\leq x<1$, η εξίσωση γράφεται

  $$(x+2)-2(-x+1)=1 \Leftrightarrow x+2+2x-2=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \text{ (δεκτή)}.$$

- Αν $x\geq 1$, η εξίσωση γράφεται

  $$(x+2)-2(x-1)=1 \Leftrightarrow x+2-2x+2=1 \Leftrightarrow x=3 \text{ (δεκτή)}.$$

  Άρα, η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς $\frac{1}{3}$ και 3.

7.

Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{x+1}$.

Λύση:

Η εξίσωση ορίζεται όταν $x+1\geq 0$, δηλαδή $x\geq -1$.

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$(\sqrt{x+1})^6=(\sqrt[3]{x+1})^6 \quad \text{(υψώνουμε στην έκτη για να αποφύγουμε και τις δύο ρίζες)}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3=(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3-(x+1)^2=0 \Leftrightarrow (x+1)^2[(x+1)-1]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2\cdot x=0 \Leftrightarrow x=-1 \quad ή \quad x=-1 \quad ή \quad x=0.$$

Και οι δύο λύσεις είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τον περιορισμό $x\geq -1$.

8.

Σ' ένα διαγωνισμό δόθηκαν για απάντηση 50 ερωτήσεις. Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 4 μόρια, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται μισό μόριο. Αν ένας εξεταζόμενος έχει συγκεντρώσει 173 μόρια, πόσες σωστές απαντήσεις είχε;

Λύση:

Έστω x το πλήθος των σωστών απαντήσεων, οπότε το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων είναι $50-x$.

Από τις σωστές απαντήσεις συγκεντρώνει $4\cdot x$ μόρια, ενώ από τις λανθασμένες, αφαιρούνται $\frac{1}{2}\cdot(50-x)$ μόρια.

Έτσι, έχουμε την εξίσωση $4x-\frac{1}{2}\cdot(50-x)=173$, η οποία γράφεται

$$2\cdot 4x-2\cdot\frac{1}{2}\cdot(50-x)=2\cdot 173 \Leftrightarrow 8x-50+x=346 \Leftrightarrow 9x=396 \Leftrightarrow x=44.$$

Άρα, ο εξεταζόμενος αυτός είχε 44 σωστές απαντήσεις.

9.

Ένα αυτοκίνητο κάνει μια συγκεκριμένη διαδρομή με μέση ταχύτητα 100 km/h. Ένα δεύτερο αυτοκίνητο ξεκινά 15 λεπτά αργότερα για να κάνει την ίδια διαδρομή με μέση ταχύτητα 120 km/h. Σε πόση ώρα το δεύτερο αυτοκίνητο θα φτάσει το πρώτο και σε πόση απόσταση από το σημείο εκκίνησης;

Λύση:

Έστω ότι ο ζητούμενος χρόνος είναι t ώρες. Το 1ο αυτοκίνητο κινείται $t+\frac{1}{4}$ ώρες (15 λεπτά $=\frac{1}{4}$ της ώρας).

Τα δύο αυτοκίνητα διανύουν την ίδια απόσταση και σύμφωνα με τον τύπο $S=\upsilon t$ έχουμε

$$100\cdot\left(t+\frac{1}{4}\right)=120\cdot t \Leftrightarrow 100t+25=120t \Leftrightarrow 20t=25$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{5}{4} \text{ ώρες} = 1 \text{ ώρα και } 15 \text{ λεπτά.}$$

Η απόσταση του σημείου συνάντησης από το σημείο εκκίνησης είναι

$$S=120\cdot\frac{5}{4}=150\,\text{km}.$$

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $9(8-x)-10(9-x)-4(x-1)=1-8x$

β. $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}=2+\frac{3x-1}{15}$

γ. $\frac{7y+4}{5}-y=\frac{3y-5}{2}$

δ. $\frac{t-1}{7}+\frac{23-t}{5}=7-\frac{4+t}{4}$

ε. $\frac{1}{6}(8-\omega)+\omega-\frac{5}{3}=\frac{1}{2}(\omega+6)-\frac{\omega}{3}$

στ. $12-\left(\frac{3\upsilon+1}{4}+\frac{2\upsilon+1}{3}\right)=10-\frac{5\upsilon-1}{4}+\frac{\upsilon+5}{6}$

ζ. $\frac{1}{4}\left(\frac{3x-5}{2}-1\right)-\frac{4}{9}(2x-7)=\frac{13}{24}-\frac{1}{3}\left[\frac{5}{3}(x-2)-3\right]$

η. $(x+5)(x+4)-\frac{1}{2}(x-1)(x+2)-\frac{1}{2}(x-3)^2=0$

θ. $\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}(y+2)^2=\left(\frac{y-1}{2}\right)^2+\frac{5}{3}.$

2. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. $\lambda x+\lambda+1=-x$

β. $(\lambda-1)x=\lambda^2-1$

γ. $\lambda x+8x=2(\lambda-1)x+10$

δ. $\lambda^2(x-2)=x-2\lambda$

ε. $\frac{x+\lambda}{5}=\frac{\lambda x-1}{15}+\frac{\lambda^2-4\lambda+5}{3}$

3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις με παραμέτρους α και β.

α. $\alpha x+\alpha=\beta x+\beta$

β. $\alpha^2x-\alpha=\beta^2x-\beta$

γ. $\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\beta}=1 \quad (\alpha\beta\neq 0)$

δ. $\alpha x-\frac{3x+2\alpha\beta}{3}=\frac{1}{2}-\beta$

ε. $\frac{x}{\alpha}-\frac{x}{\beta}=\alpha-\beta \quad (\alpha\beta\neq 0)$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^2 = 3x$

β. $x^3 = x$

γ. $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$

δ. $x^4 + 4x^2 = 4x^3$

ε. $(x-2)^2 = (1-2x)^2$

στ. $5(x^2 - 2x + 1) = 4(x^2 - 1)$

ζ. $x^3 + 2x = 0$

η. $x^4 - 1 = 0$

θ. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

ι. $(2x+3)(x^2-1) = (x+1)(x^2-1)$.

5. Να λυθούν οι κλασματικές εξισώσεις:

α. $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-6}{x+2} = 2$

β. $\dfrac{3x-2}{x^2+x} + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{6}{x^2+3x+2}$

γ. $\dfrac{x^2-x}{x} - \dfrac{1}{1-x} = -2$

δ. $\dfrac{33x-2}{9x^2-4} + \dfrac{8}{3x+2} = \dfrac{12}{3x-2}$

ε. $\dfrac{3x+1}{3-x} - \dfrac{5}{3} = \dfrac{3-x}{x+1}$

στ. $\dfrac{5}{x+3} - \dfrac{2x+1}{x^2+5x+6} = \dfrac{1}{x+2}$.

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $|3x-1| = 5$

β. $|2x+3| = |3-x|$

γ. $\left|\dfrac{x+3}{x+1}\right| = 2$

δ. $2|x| = 6 - 5x$

ε. $3|x-1| = x-3$

στ. $x^3 = 4|x|$

ζ. $\big||x+1|-2\big| = 1$

η. $\dfrac{|x|-4}{5} = \dfrac{|x|-3}{2} + \dfrac{4|x|-1}{3}$

θ. $\dfrac{3|x-3|+1}{4} - \dfrac{2-|x-3|}{3} = \dfrac{2}{3}$.

7. Να βρεθεί ο αριθμός του οποίου το μισό, αυξημένο κατά 20, είναι κατά 40 μικρότερο από το διπλάσιο του αριθμού.

8. Ένας πατέρας είναι μεγαλύτερος από το γιό του κατά 30 χρόνια και πριν 3 χρόνια το άθροισμα των ηλικιών τους ήταν 32. Να βρεθούν οι ηλικίες τους.

9. Να χωρισθεί ο αριθμός 317 σε δύο προσθετέους έτσι, ώστε ο μεγαλύτερος αν διαιρεθεί με το μικρότερο, να δίνει πηλίκο 2 και υπόλοιπο 68.

10. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 14. Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του, τότε προκύπτει αριθμός κατά 18 μεγαλύτερος. Να βρεθεί ο αριθμός αυτός.

11. Το ύψος ενός ορθογωνίου είναι τα $\frac{2}{3}$ της βάσης. Αν αυξήσουμε τη βάση κατά 1 cm, τότε η περίμετρός του γίνεται 22 cm. Να βρεθούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου.

12. Δανείστηκε κάποιος 100.000 € από δύο τράπεζες α και β με επιτόκια 8% και 9% αντίστοιχα. Να βρεθούν τα ποσά που δανείστηκε, αν γνωρίζουμε ότι σ' ένα χρόνο πλήρωσε συνολικό τόκο 8.600 €.

13. Να βρεθούν δύο αριθμοί που διαφέρουν κατά 2 και το άθροισμα των αντιστρόφων τους είναι $\frac{8}{15}$.

14. Πόσο καθαρό οινόπνευμα πρέπει να προσθέσουμε σ' ένα λίτρο οινόπνευμα περιεκτικότητας 20%, ώστε να πάρουμε οινόπνευμα περιεκτικότητας 40%;

15. Ένας εργάτης τελειώνει μόνος του ένα συγκεκριμένο έργο σε 8 ώρες. Ένας δεύτερος εργάτης για το ίδιο έργο αποδίδει 25% λιγότερο από τον πρώτο. Αν εργαστούν και οι δύο μαζί, αλλά ο δεύτερος ξεκινήσει να δουλεύει μια ώρα αργότερα από τον πρώτο, σε πόσες ώρες θα τελειώσει το έργο;

16. Ένα αυτοκίνητο πηγαίνει από την πόλη Α στην πόλη Β με ταχύτητα 100 km/h. Επιστρέφει αμέσως από την πόλη Β στην πόλη Α με ταχύτητα 80 km/h και ο χρόνος για τις δύο διαδρομές είναι 9 ώρες. Να βρεθεί η απόσταση των δύο πόλεων.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις με παραμέτρους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

α. $\lambda(\lambda^2 x - 1) + 2 = \lambda x(5\lambda - 6)$

β. $(x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 = 3x(x^2 - \lambda + 1)$

γ. $[(\lambda^2+1)x+1]^2 = [(\lambda^2-1)x-1]^2 + (2\lambda x - 1)^2$

δ. $(\lambda + x)(1 + \mu x) - \lambda(1+\mu) = \lambda^2\mu^2 + \mu x^2$

ε. $(x-\lambda)(2x-\mu)^2=(x-\mu)(2x-\lambda)^2$

στ. $\dfrac{\lambda x}{\mu}+\dfrac{1-\mu x}{\lambda}=\dfrac{1}{\mu}\quad (\lambda\mu\neq 0)$

ζ. $\dfrac{x}{\lambda}+\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{\mu}{\lambda}-\dfrac{x}{\mu}\quad (\lambda\mu\neq 0)$

2. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων α και β, ώστε η εξίσωση

$$\frac{5(\alpha x-\beta)}{4}=\frac{3}{4}(\alpha-\beta x)+4(2x-1)$$

να αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

3. Αν οι α, β, γ είναι διαφορετικοί ανά δύο, να εξετασθεί αν έχει λύσεις η εξίσωση

$$\frac{x}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{x}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{x}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=1.$$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^3-3x^2+2=0$ **β.** $x^4+x^3+x-1=0$ **γ.** $\sqrt{x}=x$ **δ.** $|x|=x.$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\dfrac{1}{x-8}+\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{1}{x+8}=0$

β. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}=0$

γ. $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y-7}=\dfrac{1}{y-3}+\dfrac{1}{y-4}$

δ. $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x-8}{x-6}=\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-9}{x-7}$

ε. $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}+\dfrac{x-6}{x-7}-\dfrac{x-5}{x-6}=0$

στ. $\dfrac{1-x-2x^2}{x^2-1}+\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-3x+2}=1.$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $|x|+|x-1|=3$

β. $|x^2-1|+|x^2-5x+4|=0$

γ. $|x|+|x-1|+|2x+1|=8$

δ. $d(x, 1)-d(x, 2)=1$

ε. $\sqrt{5x-2}=2\sqrt{1-x}$

στ. $\sqrt{x^2+1}=x+1$

ζ. $\sqrt{x}=x-2$

η. $(2x-1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt{x}.$

7. Να βρεθεί ένας διψήφιος αριθμός τέτοιος ώστε, αν εναλλάξουμε τα ψηφία του, οι δύο αριθμοί να έχουν άθροισμα ένα τετράγωνο ακεραίου.

8. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση:

$$\frac{x-3}{2007}+\frac{x-2}{2008}+\frac{x-1}{2009}+\frac{x}{2010}=\frac{x+1}{2011}+\frac{x+2}{2012}+\frac{x+3}{2013}+\frac{x+4}{2014}$$

έχει μοναδική λύση τον αριθμό 2010.

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\lambda|x|+3x=2$ **β.** $2x+3|x|=\lambda x+1$,

όπου λ πραγματική παράμετρος.

10. Να βρεθεί αριθμός, του οποίου το τετράγωνο είναι κατά 2 μεγαλύτερο από τον αντίστροφό του.

11. Αν στο $\frac{1}{3}$ ενός ακέραιου αριθμού προστεθεί ο αντίστροφος του τετραγώνου του, προκύπτει το $\frac{4}{3}$. Να βρεθεί ο αριθμός αυτός.

12. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\dfrac{x-\alpha-\beta}{\gamma}+\dfrac{x-\beta-\gamma}{\alpha}+\dfrac{x-\gamma-\alpha}{\beta}=3$

β. $\dfrac{\alpha x-\beta}{\alpha+\beta}+\dfrac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$.

13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\dfrac{(1+\sqrt{2})x}{2+\sqrt{2}}=x-1$

β. $\dfrac{|x-2|}{x-2}=x^2-2\lambda x+\lambda^2,\ \lambda\in\mathbb{R}$

γ. $\left|x^2+|x-2|\right|=4$

δ. $|x-2|+\left||x-2|-2\right|=2$

ε. $x^2-16=x^3+64$

στ. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)=x-3$

ζ. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$

η. $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{3}$.