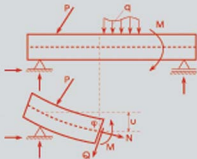


ΘΩΜΑ Ν. ΒΑΛΙΑΣΗ

# ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

- Ένταση Ισοστατικών φορέων
- Μετακινήσεις Ισοστατικών φορέων
- Μέθοδος Δυνάμεων
- Κλασική Μέθοδος Μετακινήσεων
- Μητρωϊκή διατύπωση της Μεθόδου Μετακινήσεων
- Μέθοδος Cross
- Εφαρμογή της Μεθόδου Μετακινήσεων στον H/Y
- Θέματα Εξεταστικών Περιόδων



230 Παραδείγματα

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από το συγγραφέα

ISBN 960-431-430-0

© Copyright: Θ. Βαλιάση, Εκδόσεις Ζήτη, Νοέμβριος 1997, Μάρτιος 2000, Δεκέμβριος 2001, Θεσσαλονίκη

Η κατά οποιονδήποτε τρόπο και μέσο αναπαραγωγή, δημοσίευση ή χρησιμοποίηση όλου ή μερών του βιβλίου αυτού απαγορεύεται χωρίς την έγγραφη άδεια του συγγραφέα και εκδότη.



Φωτοστοιχειοθεσία  
Εκτύπωση

**Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**

18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαιάς  
Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19  
Τηλ.: 03920-72.222 (5 γραμ.) - Fax: 03920-72.229  
*e-mail: info@ziti.gr*

Βιβλιοπωλείο

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ**

Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη  
Τηλ. 0310-203.720, Fax 0310-211.305  
*e-mail: sales@ziti.gr*

[www.ziti.gr](http://www.ziti.gr)

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η χρησιμοποίηση του Ηλεκτρονικού Υπολογιστή στο στατικό υπολογισμό των κατασκευών άλλαξε εντελώς τον τρόπο παρουσίασης των μεθόδων της Στατικής. Ο Πολιτικός Μηχανικός που σήμερα επιβάλλεται να χρησιμοποιήσει ένα πρόγραμμα για το στατικό υπολογισμό, πρέπει να έχει την ικανότητα αφενός μεν να δώσει ένα σωστό για τη λειτουργικότητα της κατασκευής στατικό μοντέλο βάσει του οποίου θα εισάγει τα δεδομένα στον υπολογιστή και αφετέρου να ελέγξει τα αποτελέσματα που θα πάρει.

Η ικανότητα αυτή αποκτάται μόνο με την πλήρη και σε βάθος γνώση των αρχών της κλασικής Στατικής.

Στην ύλη επομένως της κλασικής Στατικής μέθοδοι όπως των ομάδων δυνάμεων, των διορθωτικών υπεραριθμών, των τριών ροπών για συνεχείς δοκούς, του κυρίου υπερστατικού συστήματος κ.λπ., οι οποίες αναπτύχθηκαν για να διευκολύνουν την επίλυση με το χέρι, δεν έχουν πια πρακτική αξία.

Οι δύο τελευταίες μέθοδοι αναπτύσσονται εδώ για εκπαιδευτικούς λόγους.

Στη "Στατική των Γραμμικών Φορέων" περιέχονται οι βασικές γνώσεις που διδάσκονται στους φοιτητές του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Α.Π.Θ. στα εξάμηνα IV, V και VI.

Η όσο το δυνατόν σύντομη αλλά πλήρης ανάπτυξη του θεωρητικού μέρους, ο μεγάλος αριθμός παραδειγμάτων για την κατανόηση του και την κάλυψη των εφαρμογών και τα θέματα εξεταστικών περιόδων στο τέλος του βιβλίου είναι επιλογές που στοχεύουν στο να γίνει το βιβλίο αυτό ένα χρήσιμο και ευκολότερα αναγνώσιμο βοήθημα για τους φοιτητές στους οποίους βασικά και απευθύνεται.

Με την έκδοση του συγγράμματος αυτού ολοκληρώνεται μια προσπάθεια που άρχισε με τη συγγραφή της "Στατικής των Γραμμικών Ισοστατικών φορέων" η οποία εκδόθηκε το 1995. Ένα τρίτο μέρος που προστέθηκε αφορά την επίλυση των υπερστατικών φορέων. Έτσι η ύλη του συγγράμματος αυτού διαρθρώνεται ως εξής:

Στα κεφ. 1–8 επιλύονται τα διάφορα είδη των ισοστατικών φορέων με τη χρησιμοποίηση των συνθηκών ισορροπίας και προσδιορίζεται η εντατική τους κατάσταση.

Στο κεφ. 9 μελετάται η επίδραση των κινούμενων φορτίων στους ισοστατικούς φορείς με τη χρησιμοποίηση των γραμμών επιρροής.

Στο κεφ. 10 περιλαμβάνονται οι ενεργειακές μέθοδοι υπολογισμού των μετακινήσεων των ισοστατικών φορέων.

Στο κεφ. 11 με τίτλο "Γεωμετρικές Μέθοδοι" υπολογίζονται βυθίσεις και κλίσεις σημείων καθώς και η ελαστική γραμμή των ισοστατικών φορέων με βάση τη διαφορική εξίσωση που ισχύει για τον άξονα μιας δοκού που βρίσκεται σε καθαρή κάμψη.

Στο κεφ. 12 εξετάζεται η προσεγγιστική επίλυση των υπερστατικών φορέων.

Στο κεφ. 13 αναπτύσσεται η μέθοδος των δυνάμεων.

Στο κεφ. 14 η κλασική μέθοδος μετακινήσεων δίδεται για διδακτικούς λόγους σε εκτεταμένη μορφή ενώ θα μπορούσε να δοθεί συνοπτικότερα επειδή σημαντικότερη είναι η μητρική διατύπωση της, η οποία εισάγει στις μεθόδους υπολογισμού της μητρικής στατικής.

Η μητρική διατύπωση της μεθόδου μετακινήσεων (μέθοδος δυσκαμψίας) αναπτύσσεται στο κεφ. 15.

Στο κεφ. 16 αναπτύσσεται η μέθοδος Cross.

Στο κεφ. 17 τέλος δίδεται η θεωρητική ανάλυση της άμεσης μεθόδου δυσκαμψίας στην οποία στηρίζεται η διατύπωση των περισσοτέρων προγραμμάτων στατικού υπολογισμού των κατασκευών.

Ευχαριστώ θερμά την κ. Βάσω Μπινίκου-Σιφουνάκη η οποία επιμελήθηκε όλα τα σχήματα.

Ευχαριστώ θερμά επίσης τις κ. κ. Μαρίκα Γιουζουκτίδου - Βαφειάδου και Βιργινία Μπαξεβάνη - Παπαδοπούλου οι οποίες δακτυλογράφησαν τα κείμενα και επεξεργάστηκαν τους τύπους του πρώτου και δεύτερου μέρους, καθώς και τις εκδόσεις ΖΗΤΗ οι οποίες ανέλαβαν την υπόλοιπη εκδοτική προσπάθεια.

Θεωρώ επίσης χρέος μου να ευχαριστήσω τη σύζυγό μου Ευαγγελία για την κατανόηση και υπομονή που έδειξε όλο αυτό το διάστημα που τόσες πολλές ώρες ήμουν σκυμένος στο γραφείο μου.

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 1997

ΘΩΜΑΣ Ν. ΒΑΛΙΑΣΗΣ

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

## ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ Η ΕΝΤΑΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	9
<b>1. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ</b>	
1.1 Η ΚΙΝΗΣΗ ΤΟΥ ΔΙΣΚΟΥ.....	12
1.2 ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ - ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ.....	14
1.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ - ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΙΣΚΟΥ.....	19
1.4 ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΣΚΟΥ.....	20
<b>2. Η ΑΠΛΗ ΔΟΚΟΣ</b>	
2.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	26
2.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΟΚΟΥ.....	27
2.3 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΔΟΚΟΥ - ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ M,Q,N ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΔΟΚΩΝ.....	28
2.4 ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ.....	44
2.5 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ - ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΑ.....	46
2.6 ΟΜΟΛΟΓΗ ΔΟΚΟΣ.....	48
<b>3. ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ</b>	
3.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	53
3.2 ΜΟΡΦΩΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΩΝ.....	54
3.3 ΣΤΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΩΝ.....	57
3.4 ΚΙΝΗΤΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΩΝ.....	57
3.5 ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΩΝ.....	60
3.6 ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ.....	61
<b>4. Η ΑΡΘΡΩΤΗ ΔΟΚΟΣ</b>	
4.1 ΣΥΝΕΧΗΣ ΔΟΚΟΣ.....	84

4.2	ΑΡΘΡΩΤΗ ΔΟΚΟΣ.....	84
<b>5.</b>	<b>ΠΛΑΙΣΙΑ</b>	
5.1	ΓΕΝΙΚΑ.....	91
5.2	ΑΠΛΑ ΑΜΦΙΕΡΙΣΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ.....	94
5.3	ΤΡΙΑΡΘΡΩΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ.....	97
5.4	ΣΤΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΠΛΑΙΣΙΩΝ.....	100
5.5	ΣΥΝΘΕΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ.....	108
<b>6.</b>	<b>ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΔΟΚΟΙ - ΤΟΞΑ</b>	
6.1	ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΔΟΚΟΙ.....	112
6.2	ΤΟΞΑ.....	118
<b>7.</b>	<b>ΚΑΛΩΔΙΑΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ</b>	
7.1	ΓΕΝΙΚΑ.....	126
7.2	ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ.....	127
7.3	ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΟΜΟΛΟΓΗΣ ΔΟΚΟΥ.....	131
7.4	ΑΡΘΡΩΤΟΣ ΣΥΡΜΟΣ ΡΑΒΔΩΝ.....	136
<b>8.</b>	<b>ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΕΣ ΔΟΚΟΙ</b>	
8.1	ΓΕΝΙΚΑ.....	138
8.2	ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΗΣ ΔΟΚΟΥ.....	140
<b>9.</b>	<b>ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ</b>	
9.1	ΓΕΝΙΚΑ.....	157
9.2	ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΕΠΙΡΡΟΗΣ.....	158
9.3.	ΕΥΡΕΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΕΠΙΡΡΟΗΣ.....	159
9.4	ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ.....	173
9.5	ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΕΠΙΡΡΟΗΣ.....	200
<b>ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ</b>		
<b>ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ</b>		
	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	218
<b>10.</b>	<b>ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ</b>	
10.1	ΓΕΝΙΚΑ.....	220
10.2	ΕΡΓΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ.....	220

10.3	ΕΡΓΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ - ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ.....	222
10.4	ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ.....	227
10.5	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ.....	230
10.6	ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΛΟΓΩ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ.....	233
10.7	ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΛΟΓΩ ΦΟΡΤΙΩΝ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ.....	233
10.8	ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΤΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΜΕΝΟΥ ΦΟΡΕΑ.....	239
10.9	ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ ΓΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΣΩΜΑΤΑ.....	242
10.10	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ.....	244
10.11	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int \varphi(x) \cdot \psi(x) dx$ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	254
10.12	ΚΑΤΑΝΑΓΚΑΣΜΟΙ.....	255
10.13	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΛΟΓΩ ΚΑΤΑΝΑΓΚΑΣΜΩΝ.....	258
10.14	ΘΕΩΡΗΜΑ ΒΕΤΤΙ.....	263
10.15	ΘΕΩΡΗΜΑ CASTIGLIANO.....	268
<b>11.</b>	<b>ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ</b>	
11.1	ΓΕΝΙΚΑ.....	273
11.2	ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ.....	274
11.3	ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΟΗΡ - ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ.....	278
<b>12.</b>	<b>ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ</b>	
12.1	ΓΕΝΙΚΑ.....	315
12.2	ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ.....	316
12.3	ΠΛΑΙΣΙΑ.....	316
12.4	ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ.....	324

**ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ**  
**ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΙΣ ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	219
<b>10. ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ</b>	
10.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	221
10.2 ΕΡΓΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ.....	221
10.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ.....	223



10.4	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ .....	234
10.5	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int \phi(x) \psi(x) dx$ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ .....	254
10.6	ΚΑΤΑΝΑΓΚΑΣΜΟΙ.....	255
10.7	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΛΟΓΩ ΚΑΤΑΝΑΓΚΑΣΜΩΝ.....	258
10.8	ΘΕΩΡΗΜΑ CASTIGLIANO .....	264
10.9	ΘΕΩΡΗΜΑ ΒΕΤΤΙ.....	270
10.10	ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΤΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΟΜΕΝΟΥ ΦΟΡΕΑ .....	274
<b>11. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ</b>		
11.1	ΓΕΝΙΚΑ.....	278
11.2	ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ.....	279
11.3	ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΟΗΡ - ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ.....	283
<b>12. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ</b>		
12.1	ΓΕΝΙΚΑ.....	320
12.2	ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ .....	321
12.3	ΠΛΑΙΣΙΑ .....	321
12.4	ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ.....	329
<b>ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ</b>		
<b>ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ</b>		
<b>13. ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ (ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΥΚΑΜΨΙΑΣ)</b>		
13.1	ΓΕΝΙΚΑ.....	333
13.2	ΤΟ ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΔΥΝΑΜΕΩΝ.....	333
13.3	ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΥΚΑΜΨΙΑΣ .....	337
13.4	ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ - ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΑ .....	356
13.5	ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΡΟΠΩΝ .....	377
13.6	ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΙΣ ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ .....	389
13.7	ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ.....	405
13.8	ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ (Γ.Ε).....	415
<b>14. ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ</b>		
14.1	ΓΕΝΙΚΑ .....	453
14.2	ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΑΟΡΙΣΤΙΑ (ΓΕΝΙΚΑ) .....	454
14.3	ΟΙ ΒΑΘΜΟΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΤΗΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ .....	456
14.4	ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΡΑΒΔΩΝ .....	459
14.5	ΠΡΟΣΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ .....	461
14.6	ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ –ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΠΩΝ– ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ.....	462
14.7	ΤΟ ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ .....	466
14.8	ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΔΟΚΟΙ .....	473
14.9	ΠΑΓΙΑ ΠΛΑΙΣΙΑ.....	475
14.10	ΥΠΕΡΠΑΓΙΑ ΠΛΑΙΣΙΑ .....	481
14.11	ΚΙΝΗΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ .....	485
14.12	ΚΑΤΑΝΑΓΚΑΣΜΟΙ .....	522

**15. ΜΗΤΡΩΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ  
(ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ)**

15.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΈΝΤΑΣΗΣ .....	540
15.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ .....	575
15.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ .....	575
15.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΕΠΙΡΡΟΗΣ .....	575
15.5 ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....	584
15.6 ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ .....	586

**16. ΜΕΘΟΔΟΣ CROSS**

16.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	591
16.2 ΠΡΟΣΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ CROSS .....	592
16.3 ΔΕΙΚΤΗΣ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΔΟΚΟΥ.....	592
16.4 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΤΑΒΙΒΑΣΗΣ ΔΟΚΟΥ .....	592
16.5 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ .....	593
16.6 ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ CROSS .....	595
16.7 ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΔΟΚΟΙ.....	598
16.8 ΠΑΓΙΑ ΚΑΙ ΥΠΕΡΠΑΓΙΑ ΠΛΑΙΣΙΑ .....	603
16.9 ΚΙΝΗΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ .....	606

**17. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΣΤΟΝ Η.Υ.**

17.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	626
17.2 ΤΟ ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΑΜΕΣΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΣΤΟΝ Η.Υ. ....	626
17.3 ΤΟ ΗΜΙΕΥΡΟΣ ΤΑΙΝΙΑΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ .....	638

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ**

<i>I. ΠΙΝΑΚΕΣ.....</i>	646
<i>II. ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΔΩΝ ΣΤΟ ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΗΣ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΤΟΥ Α.Π.Θ.....</i>	659
ΕΦ. ΣΤΑΤΙΚΗ I: Ισοστατικοί φορείς (ένταση - μετακινήσεις - ελαστική γραμμή).....	661
ΕΦ. ΣΤΑΤΙΚΗ II: Μέθοδος δυνάμεων .....	676
ΕΦ. ΣΤΑΤΙΚΗ III: Μέθοδος μετακινήσεων .....	689

# 13

## ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ (ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΥΚΑΜΨΙΑΣ)

### 13.1 ΓΕΝΙΚΑ

Για την επίλυση των ισοστατικών φορέων (εύρεση των αντιδράσεων -εύρεση των μεγεθών έντασης) αρκούν οι συνθήκες ισορροπίας. Για την επίλυση των υπερστατικών φορέων πρέπει εκτός από τις συνθήκες ισορροπίας να διατυπωθούν επιπλέον συνθήκες ίσες σε αριθμό με το βαθμό στατικής αοριστίας  $n$ . Και ενώ για τη διατύπωση των συνθηκών ισορροπίας απαιτείται να ληφθεί υπόψη μόνο η γεωμετρία του φορέα, για τις επιπλέον συνθήκες, εκτός από τη γεωμετρία πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι ιδιότητες του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένος ο φορέας. Αυτές εκφράζονται με τα ελαστικά χαρακτηριστικά που είναι το μέτρο ελαστικότητας, η διατομή, και η ροπή αδράνειας της διατομής.

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτυχθεί η κλασική μέθοδος των δυνάμεων με την οποία επιλύονται οι υπερστατικοί φορείς.

### 13.2 ΤΟ ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Το σκεπτικό της μεθόδου δυνάμεων θα δοθεί μέσα από την ανάλυση των δύο παραδειγμάτων που ακολουθούν.

**Παράδειγμα 13.1** Η δοκός του σχ. 13.1 είναι μια φορά υπερστατική ( $n=1$ ) και λόγω του φορτίου  $P$  αναπτύσσονται οι αντιδράσεις  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $M_A$ ,  $B_y$ .

Για την επίλυση της ακολουθούνται τα εξής βήματα.

- Η δοκός γίνεται ισοστατική. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την αφαίρεση είτε μιας ράβδου στήριξης είτε μιας ράβδου από κάποια διατομή της. Ο ισοστατικός φορέας που προκύπτει κατ' αυτόν τον τρόπο καλείται ισοστατικό κύριο σύστημα ή για συντομία απλώς κύριο σύστημα (Κ.Σ.).

Αν αφαιρεθεί π.χ. η ράβδος της στήριξης  $B$  προκύπτει ο πρόβολος του σχ. 13.1 ο οποίος είναι το κύριο σύστημα της υπερστατικής δοκού.

Η αντίδραση  $B_y$  που μεταβίβαζε στο φορέα η καταργηθείσα στήριξη χαρα-

κτηρίζεται σαν υπεράριθμη οπότε συμβολίζεται με  $X$  και είναι η άγνωστη που πρέπει να υπολογισθεί. Η σχεδίαση στο Κ.Σ. και της υπεράριθμης  $X$  γίνεται για λόγους εποπτείας.

- Το κύριο σύστημα φορτίζεται με το εξωτερικό φορτίο  $P$  (σχ. 13.1a) και υπολογίζεται η μετακίνηση κατά τη διεύθυνση της καταρτηθείσας ράβδου στο  $B$  με μια από τις μεθόδους υπολογισμού των μετακινήσεων των ισοστατικών φορέων από την οποία προκύπτει

$$\delta_{B,P} = + \frac{Pl^3}{2EI} \quad 13.1$$

Στο συμβολισμό των μετακινήσεων ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στη θέση της μετακίνησης και ο δεύτερος στο αίτιο που την προκαλεί.

- Το κύριο σύστημα φορτίζεται με την υπεράριθμη δύναμη  $X$  (σχ. 13.1.b) και υπολογίζεται η μετακίνηση κατά τη διεύθυνση της καταρτηθείσας ράβδου στο  $B$ . Από τον υπολογισμό προκύπτει

$$\delta_{B,X} = - \frac{Xl^3}{3EI} \quad 13.2$$

Σχ. 13.1

- Επειδή γίνεται δεκτό ότι ισχύει η αρχή της επαλληλίας, η ταυτόχρονη επίδραση στο κύριο σύστημα των  $P$  και  $X$  θα δώσει μετακίνηση

$$\delta_B = \delta_{B,P} + \delta_{B,X} = 0 \quad 13.3$$

γιατί η στήριξη  $B$  απαγορεύει την κάθετη μετακίνηση.

Η εξίσωση 13.3. καλείται συνθήκη συμβιβαστού των μετακινήσεων και απ' αυτή υπολογίζεται η άγνωστη  $X$ . Πράγματι αν σ' αυτή αντικατασταθούν οι  $\delta_{B,P}$ ,  $\delta_{B,X}$  από τις εξισώσεις 13.1, 13,2 προκύπτει

$$+ \frac{Pl^3}{2EI} - \frac{Xl^3}{3EI} = 0 \Rightarrow X = \frac{3P}{2} \quad 13.4$$

Μετά τον υπολογισμό του υπεράριθμου φορτίου ο φορέας αντιμετωπίζεται σαν ένας ισοστατικός φορέας που δέχεται τα φορτία  $P$  και  $X$  και επιλύεται κατά τα γνωστά.

Η επιλογή της υπεράριθμης (ή των υπεραρίθμων) σ' έναν υπερστατικό φορέα είναι αυθαίρετη, αρκεί το κύριο σύστημα που προκύπτει να μην εμφανίζει κινητότητα. Ο όγκος όμως των υπολογισμών εξαρτάται από την επιλογή αυτή.

Στη δοκό του σχ. 13.1 αν αντί της  $B_y$  επιλεγεί σαν υπεράριθμο φορτίο η ροπή  $M_A$  τότε προκύπτει το κύριο σύστημα του σχ. 13.2. Η επίλυση στην περίπτωση αυτή γίνεται με τον ίδιο τρόπο:

- Φορτίζεται το κύριο σύστημα με το φορτίο  $P$  και υπολογίζεται η  $\varphi_{A, p}$ .

$$\varphi_{A, p} = -\frac{Pl^2}{18EI} \quad 13.5$$

- Φορτίζεται το κύριο σύστημα με το φορτίο  $X$  και υπολογίζεται η  $\varphi_{A, x}$

$$\varphi_{A, x} = \frac{Xl}{3EI} \quad 13.6$$

- Επειδή η στροφή της εφραπτομένης στην πάκτωση  $A$  είναι μηδενική, η εξίσωση συμβιβαστού των μετακινήσεων εκφράζεται από τη σχέση

$$\varphi_A = \varphi_{A, p} + \varphi_{A, x} = 0 \quad 13.7$$

από την οποία, αν αντικατασταθούν οι  $\varphi_{A, p}$  και  $\varphi_{A, x}$  από τις εξισώσεις 13.5, 13.6 αντίστοιχα, προκύπτει

$$X = M_A = \frac{Pl}{6} \quad 13.8$$

**Σχ. 13.2**

Αν τέλος στην ίδια δοκό επιλεγεί σαν υπεράριθμο μέγεθος η ροπή  $M_i = X$  τότε προκύπτει το κύριο σύστημα του σχ. 13.3.

- Λόγω του φορτίου  $P$  η αμοιβαία στροφή των διατομών της άρθρωσης  $i$  υπολογίζεται ίση με

$$\varphi_{i, p} = \frac{Pl^2}{9EI} \quad 13.9$$

- Λόγω των υπεράριθμων ροπών  $X$  είναι επίσης

$$\varphi_{i, x} = \frac{4Xl}{3EI} \quad 13.10$$

- Επειδή στον αρχικό φορέα η αμοιβαία στροφή των διατομών στο  $i$  ισούται με μηδέν, η εξίσωση συμβιβαστού των μετακινήσεων εκφράζεται από τη σχέση

$$\varphi_{i, p} + \varphi_{i, x} = 0 \quad 13.11$$

στην οποία αν αντικατασταθούν οι  $\varphi_{i, p}$ ,  $\varphi_{i, x}$  από τις εξισώσεις 13.9, 13.10 προκύπτει

$$\frac{Pl^2}{9EI} + \frac{4Xl}{3EI} = 0 \Rightarrow X = -\frac{Pl}{12} \quad 13.12$$

**Σχ. 13.3**

Η επιλογή της φοράς μιας υπεράριθμης είναι κατ' αρχάς αυθαίρετη. Αν η τιμή της από την επίλυση της συνθήκης συμβι-

βαστού των μετακινήσεων προκύψει αρνητική τότε η σωστή φορά είναι αντίθετη απ' αυτή που επιλέχθηκε.

Στην περίπτωση που η υπεράριθμη είναι φορτίο διατομής, είναι προτιμότερο σαν αρχική φορά να επιλέγεται η θετική φορά του φορτίου διατομής για να συμπίπτει το πρόσημο που προκύπτει από την επίλυση της συνθήκης συμβιβαστού των μετακινήσεων με το πραγματικό πρόσημο.

**Παράδειγμα 13.2** Η δοκός του σχ. 13.4 είναι τρεις φορές υπερστατική. Σαν υπεράριθμα μεγέθη επιλέχθηκαν οι αντιδράσεις  $C_y=X_1$ ,  $B_y=X_2$  και  $M_A=X_3$  οπότε προέκυψε το κύριο σύστημα του σχ. 13.4.

Φορτίζεται κατ' αρχάς το Κ.Σ. με την υπεράριθμη  $X_1$  μόνο (σχ. 13.4.α) και υπολογίζονται οι μετακινήσεις στις θέσεις όλων των υπεράριθμων. Η κάθε μια μετακίνηση πρέπει να ανταποκρίνεται εργικά στο αντίστοιχο υπεράριθμο φορτίο. Π.χ. η μετακίνηση  $\delta_{1,1}$  στο C είναι κατά τη διεύθυνση της  $X_1$ , η μετακίνηση  $\delta_{2,1}$  στο B είναι κατά τη διεύθυνση της  $X_2$  ενώ η μετακίνηση  $\delta_{3,1}$  είναι η γωνία στροφής της  $X_3$ .

Φορτίζεται στη συνέχεια το Κ.Σ. διαδοχικά με το καθένα από τα υπόλοιπα υπεράριθμα φορτία  $X_2, X_3$  καθώς και με την εξωτερική φόρτιση η οποία συμβολίζεται με το γράμμα  $p$  και υπολογίζονται οι μετακινήσεις  $(\delta_{1,2} \delta_{2,2} \delta_{3,2}), (\delta_{1,3} \delta_{2,3} \delta_{3,3})$   $(\delta_{1,p}, \delta_{2,p} \delta_{3,p})$  αντίστοιχα (σχ. 13.4. b, c, d).

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας αν επιδρούν όλα τα φορτία συγχρόνως στο κύριο σύστημα η συνολική μετακίνηση στη θέση C είναι

$$\delta_C = \delta_{1,1} + \delta_{1,2} + \delta_{1,3} + \delta_{1,p} = 0 \quad 13.13a$$

γιατί στη θέση αυτή η στήριξη απαγορεύει την κάθετη μετακίνηση. Για τον ίδιο λόγο είναι και

$$\delta_B = \delta_{2,1} + \delta_{2,2} + \delta_{2,3} + \delta_{2,p} = 0 \quad 13.13.b$$

$$\delta_A = \delta_{3,1} + \delta_{3,2} + \delta_{3,3} + \delta_{3,p} = 0 \quad 13.13.c$$

Οι εξισώσεις 13.13 a, b, c είναι οι εξισώσεις συμβιβαστού των μετακινήσεων.

Οι μετακινήσεις  $\delta_{i,j}$  και  $\delta_{i,p}$  υπολογίζονται σύμφωνα με τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν στα κεφ. 10 και 11 για τις μετακινήσεις των ισοστατικών φορέων και η κάθε μια από αυτές προκύπτει ότι είναι συνάρτηση της φόρτισης και των γεωμετρικών και ελαστικών χαρακτηριστικών του φορέα. Η αντικατάσταση των  $\delta_{i,j}$  και  $\delta_{i,p}$  στις εξισώσεις 13.13 δίνει ένα σύστημα εξισώσεων  $3 \times 3$  με άγνωστες τις υπεράριθμες  $X_1, X_2, X_3$  από την επίλυση του οποίου αυτές υπολογίζονται.

### 13.3 ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΥΚΑΜΨΙΑΣ

Το μέγεθος της μετακίνησης  $\delta_{i,j}$  λόγω της φόρτισης του κυρίου συστήματος από την υπεράριθμη  $X_j$  εξαρτάται από την ευκαμψία του φορέα. Όσο πιο εύκαμπτος είναι ο φορέας τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της  $\delta_{i,j}$  για το συγκεκριμένο φορτίο  $X_j$ . Το αποτέλεσμα αυτό προσδιορίζεται πιο εύκολα όταν αναφερόμαστε στην επίδραση ενός μοναδιαίου φορτίου αντίστοιχο του  $X_j$ . Ορίζεται για το λόγο αυτό ότι

$$\delta_{i,j} = f_{ij} X_j \quad 13.14$$

οπότε η  $f_{ij}$  είναι η μετακίνηση που οφείλεται σ' ένα μοναδιαίο φορτίο που ενεργεί κατά την ίδια διεύθυνση και φορά με το  $X_j$  και καλείται δείκτης ευκαμψίας.

Σαν δείκτης ευκαμψίας  $f_{ij}$  ενός φορέα ορίζεται συνεπώς η μετακίνηση του σημείου  $i$  που οφείλεται σ' ένα μοναδιαίο φορτίο στο σημείο  $j$ .

Οι δείκτες ευκαμψίας είναι συνάρτηση των γεωμετρικών και ελαστικών χαρακτη-

ριστικών του φορέα και ανεξάρτητοι από την εξωτερική φόρτιση ή τον καταναγκασμό.

Με την εισαγωγή των δεικτών ευκαμψίας η εξίσωση 13.3 γίνεται

$$f_{11}X_1 + f_{1p} = 0$$

όπου η  $f_{11}$  προκύπτει από την εξίσωση 13.2 για  $X=1$  ( $f_{11} = -l^3/2EI$ ) και  $\delta_{1,p} = f_{1p}$ . Επίσης οι εξισώσεις συμβιβαστού των μετακινήσεων του φορέα του σχ. 13.4 γίνονται

$$\begin{aligned} f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + f_{13}X_3 + f_{1p} &= 0 \\ f_{21}X_1 + f_{22}X_2 + f_{23}X_3 + f_{2p} &= 0 \\ f_{31}X_1 + f_{32}X_2 + f_{33}X_3 + f_{3p} &= 0 \end{aligned} \quad 13.15$$

ή σε μητρωϊκή μορφή

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{1p} \\ f_{2p} \\ f_{3p} \end{vmatrix} = 0 \quad 13.16$$

$$\mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{F}_0 = 0$$

όπου **F**: μητρώο ευκαμψίας

**X**: μητρώο υπεραρίθμων φορτίων

**F**<sub>0</sub>: μητρώο φορτιστικών όρων

Για το μητρώο ευκαμψίας παρατηρούμε τα εξής:

- Επειδή οι συντελεστές ευκαμψίας πληρούν την εξίσωση Maxwell-Mohr

$$f_{ij} = f_{ji} \quad 13.17$$

το μητρώο ευκαμψίας είναι συμμετρικό.

- Τα πρόσημα της κυρίας διαγωνίου είναι πάντα θετικά γιατί οι μετακινήσεις  $f_{ii}$  πραγματοποιούνται πάντοτε κατά τη φορά των  $X_i$ .
- Το πρόσημο της  $f_{ij}$  προκύπτει θετικό όταν η φορά της είναι ίδια με τη φορά της  $f_{ii}$ .
- Στην περίπτωση που το Κ.Σ επελεγεί σωστά, δηλαδή δεν εμφανίζει κινητότητα, το μητρώο **F** είναι θετικά ορισμένο και ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \det \mathbf{F} &> 0 \\ f_{ii} \cdot f_{jj} &\geq f_{ij}^2 \end{aligned} \quad 13.18$$

Στην αντίθετη περίπτωση που το Κ.Σ εμφανίζει κινητότητα είναι

$$\det \mathbf{F} = 0 \quad 13.19$$

οπότε η επίλυση του συστήματος είναι αδύνατη.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της ορθότητας των αποτελεσμάτων.

Η μέθοδος των δυνάμεων μπορεί εύκολα να εφαρμοσθεί σ' όλα τα είδη των φορέων (δοκούς, δικτυώματα, πλαίσια κ.λπ.). Επίσης εκτός από φορείς που η εντατική τους κατάσταση οφείλεται σε εξωτερικά φορτία εφαρμόζεται με ευκολία και σε φορείς που η εντατική τους κατάσταση οφείλεται σε καταναγκασμούς.



Ο μόνος περιορισμός που τίθεται είναι ότι πρέπει να ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Προϋποθέσεις δε για να συμβαίνει αυτό είναι να μην μεταβάλλεται αισθητά η γεωμετρία του φορέα, και να ισχύει ο νόμος του Hooke για το υλικό του φορέα.

Τα μεγέθη έντασης και μετακίνησης του υπερστατικού φορέα εκφράζονται σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας συναρτήσει των μεγεθών έντασης και μετακίνησης του κυρίου συστήματος από τις εξισώσεις.

#### Εξωτερική φόρτιση $p$

$$\dot{E}_{i,p} = E_{i,p} + E_{i,1} X_1 + E_{i,2} X_2 + \dots + E_{i,n} X_n \quad 13.20$$

$$\dot{\delta}_{i,p} = \delta_{i,p} + \delta_{i,1} X_1 + \delta_{i,2} X_2 + \dots + \delta_{i,n} X_n$$

#### Καταναγκασμοί $\kappa$

$$\dot{E}_{i,\kappa} = 0 + E_{i,1} X_1 + E_{i,2} X_2 + \dots + E_{i,n} X_n \quad 13.21$$

$$\dot{\delta}_{i,\kappa} = \delta_{i,\kappa} + \delta_{i,1} X_1 + \delta_{i,2} X_2 + \dots + \delta_{i,n} X_n$$

όπου  $\dot{E}_{i,p}$ ,  $\dot{E}_{i,\kappa}$  : μεγέθη έντασης του υπερστατικού φορέα λόγω εξωτερικής φόρτισης και καταναγκασμού αντίστοιχα.

$\dot{\delta}_{i,p}$ ,  $\dot{\delta}_{i,\kappa}$  : μεγέθη μετακίνησης του υπερστατικού φορέα λόγω εξωτερικής φόρτισης και καταναγκασμού αντίστοιχα.

Συνοψίζοντας μπορούμε να διακρίνουμε τα παρακάτω στάδια επίλυσης των υπερστατικών φορέων με τη μέθοδο δυνάμεων.

1. Προσδιορίζεται ο βαθμός στατικής αοριστίας  $n$  του φορέα και επιλέγονται τα υπεράριθμα μεγέθη  $X_1, X_2 \dots X_n$  και επομένως και το κύριο ισοστατικό σύστημα.
2. Υπολογίζονται οι δείκτες ευκαμψίας  $f_{ij}$  και οι φορτιστικοί όροι  $f_{ip}$  ή  $f_{i\kappa}$ . Αν για τον υπολογισμό τους χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του μοναδιαίου φορτίου τότε πρέπει να βρεθούν τα διαγράμματα  $M_{,1}, M_{,2}, \dots, M_{,n}$  λόγω  $X_1=1, X_2=1 \dots X_n=1$  αντίστοιχα και τα διαγράμματα  $M_{,p}$  ή  $M_{,\kappa}$  λόγω της εξωτερικής φόρτισης ή του καταναγκασμού.
3. Διατυπώνεται το σύστημα των εξισώσεων συμβιβαστού των μετακινήσεων, επιλύεται και υπολογίζονται τα υπεράριθμα μεγέθη.
4. Το κύριο σύστημα φορτισμένο με την εξωτερική φόρτιση ή τον καταναγκασμό καθώς επίσης και τα υπεράριθμα φορτία τα οποία δεχόμαστε σαν επιβεβλημένα φορτία, είναι ένας φορέας ισοδύναμος με τον αρχικό, γιατί πληρεί τις συνθήκες ισορροπίας και στις θέσεις των υπεραρίθμων παρόλο που υπάρχει δυνατότητα μετακίνησης, αυτή είναι μηδενική. Η επίλυση συνεπώς του ισοδύναμου φορέα (Ι.Φ.) που είναι ισοστατικός, δίνει τα μεγέθη έντασης του υπερστατικού φορέα.

Σε περιπτώσεις που τα υπεράριθμα φορτία είναι ροπές κάμψης, για τον υπολογισμό ροπών σε χαρακτηριστικά σημεία προτιμούνται οι τύποι της επαλληλίας.

$$\dot{M}_{i,\alpha} = M_{i,\alpha} + (M_{i,1} X_1 + M_{i,2} X_2 + \dots + M_{i,n} X_n) \quad 13.22$$

όπου  $M_{i,\alpha}$  : η ροπή του σημείου  $i$  στο Κ.Σ λόγω του αιτίου  $\alpha$ .

$M_{i,1}, M_{i,2} \dots M_{i,n}$  : οι ροπές στο σημείο  $i$  λόγω των υπεραρίθμων  $X_1, X_2, \dots, X_n$  αντίστοιχα οι οποίες είναι γνωστές από τα διαγράμματα  $M_{,1} M_{,2} \dots M_{,n}$ .

**Παράδειγμα 13.3** Για τη συνεχή δοκό του σχ. 13.5 να βρεθούν: α) Τα διαγράμματα  $\dot{Q}_{,p}, \dot{M}_{,p}$ . β) Πόσο πρέπει να αποχωρήσουν οι στηρίξεις Β και C ώστε οι ροπές κάμψης λόγω της εξωτερικής φόρτισης στα σημεία αυτά να μηδενισθούν ( $EI=10^4 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ ).

α) Λαμβάνονται σαν υπεράριθμα μεγέθη οι ροπές  $\dot{M}_B=X_1$  και  $\dot{M}_C=X_2$  οπότε προκύπτει το Κ.Σ του σχ. 13.5.

*Δείκτες ευκαμψίας*

Από τα διαγράμματα  $M_{,1}, M_{,2}$  και τους τύπους του πίν. 10.3 προκύπτει

$$f_{11} = \int \frac{M_{,1} M_{,1}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 = \frac{1}{EI} \cdot 3,333$$

$$f_{22} = \int \frac{M_{,2} M_{,2}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 11 = \frac{1}{EI} \cdot 3,667$$

$$f_{12} = \int \frac{M_{,1} M_{,2}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 = \frac{1}{EI} \cdot 1.$$

*Φορτιστικοί όροι*

Από τα διαγράμματα  $M_{,p}, M_{,1}, M_{,2}$  και τους τύπους του πίν. 10.3 προκύπτει

$$f_{1p} = \int \frac{M_{,1} M_{,p}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 40 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 135 \cdot 6 \right) = \frac{1}{EI} \cdot 323,333$$

$$f_{2p} = \int \frac{M_{,2} M_{,p}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 135 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 62,5 \cdot 5 \right) = \frac{1}{EI} \cdot 374,167.$$

*Συνθήκες συμβιβαστού των μετακινήσεων*

$$\begin{aligned} f_{11} X_1 + f_{12} X_2 + f_{1p} &= 0 & \Rightarrow & 3,333 X_1 + X_2 + 323,333 = 0 \\ f_{21} X_1 + f_{22} X_2 + f_{2p} &= 0 & \Rightarrow & X_1 + 3,667 X_2 + 374,167 = 0 \end{aligned}$$

Από την επίλυση του συστήματος των δύο εξισώσεων προκύπτει

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} -323,333 & 1 \\ -374,167 & 3,667 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3,333 & 1 \\ 1 & 3,667 \end{vmatrix}} = -\frac{811,495}{11,222} = -72,313$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3,333 & -323,333 \\ 1 & -374,167 \end{vmatrix}}{12,222} = -\frac{923,766}{11,222} = -82,317.$$

Διαγράμματα  $\dot{Q}, \dot{p}, \dot{M}, \dot{p}$ .

Από τον ισοδύναμο φορέα του σχ. 13.5 προκύπτει

$$\Delta Q_{AB} = \frac{-72,313}{4} = -18,08 \quad \dot{Q}_A = 40 - 18,08 = 21,92 \quad \dot{Q}_B^a = -40 - 18,08 = -58,08$$

$$\Delta Q_{BC} = \frac{-82,317 + 72,313}{6} = -1,67 \quad \dot{Q}_B^b = 90 - 1,67 = 88,33 \quad \dot{Q}_C^a = -90 - 11,67 = -91,67$$

$$\Delta Q_{CD} = \frac{82,317}{5} = 16,46 \quad \dot{Q}_K^b = 50 + 16,46 = 66,46 \quad \dot{Q}_D = -50 + 16,46 = -33,54$$

$$\max M_{AB} = \frac{21,92^2}{2 \cdot 20} = 12,01 \quad x_m = \frac{21,92}{20} = 1,1$$

$$\max M_{BC} = -72,313 + \frac{88,33^2}{2 \cdot 30} = 57,72 \quad x_m = \frac{88,33}{30} = 2,94$$

$$\max M_{CD} = -82,317 + \frac{66,46^2}{2 \cdot 20} = 28,11 \quad x_m = \frac{66,46}{20} = 3,32$$

**β)** Έστω  $u_B, u_C$  οι ζητούμενες υποχωρήσεις των B και C. Θα λυθεί ο φορέας για τους καταναγκασμούς αυτούς.

*Φορτιστικοί όροι*

Από τους τύπους του πιν. 10.3 και τις αντιδράσεις στο B και C λόγω  $X_1=1$  και  $X_2=1$  προκύπτει.

$$f_{1w} = -0,417u_B + 0,167u_C \quad f_{2w} = 0,167u_B - 0,367u_C$$

*Συνθήκες συμβιβαστού των μετακινήσεων.*

$$\begin{aligned} 3,333X_1 + X_2 + EI(-0,4167u_B + 0,1667u_C) &= 0 & X_1 &= 1510,2u_B - 871,5u_C \\ X_1 + 3,667X_2 + EI(0,1667u_B - 0,3667u_C) &= 0 & \Rightarrow X_2 &= -866,4u_B + 1237,7u_C \end{aligned}$$

Επειδή λόγω της υποχώρησης πρέπει να είναι  $X_1 = +72,313$   $X_2 = +82,317$  οι βυθίσεις  $u_B, u_C$  υπολογίζονται από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων

$$\begin{aligned} 1510,2u_B - 871,5u_C &= 72,313 & u_B &= 0,145 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -866,4u_B + 1237,7u_C &= 82,317 & \Rightarrow u_C &= 0,168 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 13.4** Στο πλαίσιο του σχ. 13.6 να υπολογισθούν:

α) Τα διαγράμματα  $\dot{M}, \dot{Q}, \dot{N}$  για την εξωτερική φόρτιση.

β) Το διάγραμμα  $\dot{M}$  ξεχωριστά για το καθένα από τα παρακάτω αίτια

- $\Delta t = 40^\circ\text{C}$  στο ζύγωμα CDE
- $t = 30^\circ\text{C}$  στη ράβδο FL.
- $\Delta\varphi = 0,01$  rad στο σημείο K.
- $u = 1$  cm της στήριξης A.

$$\begin{aligned} \text{Δεδομένα:} \quad EI_1 &= 22,5 \cdot 10^3 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 & EI_2 &= 47,8 \cdot 10^3 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 \\ EF_r &= 210 \cdot 10^3 \text{ kN} & h_{CE} &= 0,45 \text{ m} & \alpha &= 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ grad}^{-1} \end{aligned}$$

**Σχ. 13.6.** (συνέχεια)

**α)** Σαν υπεράριθμα μεγέθη επιλέγονται η οριζόντια αντίδραση στο Α ( $A_x=X_1$ ) και η αξονική δύναμη της ράβδου  $r$  ( $S_r=X_2$ ) οπότε προκύπτει το Κ.Σ του σχ. 13.6.

*Δείκτες ευκαμψίας*

$$f_{11} = 2 \cdot \frac{1}{22,5 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{3} (-7)(-7) \cdot 7 + \frac{1}{47,8 \cdot 10^3} (-7)(-7) \cdot 12 = 22,46 \cdot 10^{-3}$$

$$f_{12} = 2 \cdot \frac{1}{22,5 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{6} (-3) [(-4)+2(-7)] \cdot 3 + \frac{1}{47,8 \cdot 10^3} (-7)(-3) \cdot 12 = 7,67 \cdot 10^{-3}$$

$$f_{22} = 2 \cdot \frac{1}{22,5 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{3} (-3)(-3) \cdot 3 + \frac{1}{47,8 \cdot 10^3} (-3)(-3) \cdot 12 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 12}{210 \cdot 10^3} = 3,12 \cdot 10^{-3}$$

*Φορτιστικοί όροι*

$$f_{1p} = \frac{1}{47,8 \cdot 10^3} \left[ \frac{1}{2} 592,5 \cdot (-7) \cdot 6 + \frac{2}{3} 63 \cdot (-7) \cdot 6 \right] +$$

$$+ \frac{1}{47,8 \cdot 10^3} \left[ \frac{-7}{+6+} \cdot \left( \frac{+655,5}{+6+} + \frac{+63}{+6+} + \frac{-63}{+6+} \right) \right] =$$

$$= -297,21 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{47,8 \cdot 10^3} \left[ \frac{1}{2} (-7) \cdot 655,5 \cdot 6 + \frac{2}{3} (-7) \cdot 63 \cdot 6 + (-7) \cdot (-63) \cdot 6 \right] =$$

$$= -566,71 \cdot 10^{-3}$$

$$f_{2p} = \frac{1}{47,8 \cdot 10^3} \left[ \frac{1}{2} 592,5 (-3) \cdot 6 + \frac{2}{3} 63 \cdot (-3) \cdot 6 \right] +$$

$$+ \frac{1}{47,8 \cdot 10^3} \left[ \frac{1}{2} (-3) 655,5 \cdot 6 + \frac{2}{3} (-3) \cdot 63 \cdot 6 + (-3) \cdot (-63) \cdot 6 \right] = -242,88 \cdot 10^{-3} .$$

Συνθήκες συμβιβαστού των μετακινήσεων

$$\left. \begin{aligned} 22,46X_1 + 7,67X_2 &= 566,71 \\ 7,67X_1 + 3,12X_2 &= 242,88 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} X_1 &= -8,43 \\ X_2 &= +98,56 \end{aligned} .$$

Υπολογισμός του  $\dot{M}_{i,p}$ .

Σύμφωνα με τον τύπο της επαλληλίας  $\dot{M}_{i,p} = M_{i,p} + X_1 M_{i,1} + X_2 M_{i,2}$  είναι:

$$\dot{M}_{C,p} = 0 + (-8,43) \cdot (-7) + 98,56 \cdot (-3) = -236,67$$

$$\dot{M}_{K,p} = 592,5 + (-8,43) \cdot (-7) + 98,56 \cdot (-3) = 355,83$$

$$\dot{M}_{D,p}^a = -63 + (-8,43) \cdot (-7) + 98,56 \cdot (-3) = -299,67$$

$$\dot{M}_{D,p}^k = 0 + (-8,43) \cdot (-7) + 98,56 \cdot (-3) = -236,67$$

$$\dot{M}_{F,p} = (-8,43) \cdot (-4) = 33,72 = \dot{M}_L .$$

Υπολογισμός των  $\dot{Q}_p$ ,  $\dot{N}_p$ .

Υπολογίζονται από την επίλυση του ισοδύναμου φορέα του οποίου οι αντιδράσεις είναι:

$$A_y = 98,75 - 8,43 \cdot 0 + 98,56 \cdot 0 = 98,75 \quad B_y = 151,25 \quad A_x = -B_x = 8,43 .$$

**β)** Για το κάθε αίτιο υπολογίζονται οι φορτιστικοί όροι και λύνεται το σύστημα συνθηκών συμβιβαστού από το οποίο προκύπτουν οι  $X_1$ ,  $X_2$ .

–  $\Delta t = 40^\circ\text{C}$  στο ζύγωμα CDE

$$f_{1\Delta t} = \frac{\alpha \Delta t}{h} \int M_{,1} dx = \frac{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 40}{0,45} (-7) \cdot 12 = -89,60 \cdot 10^{-3}$$

$$f_{2\Delta t} = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{h} \int M_{,2} dx = \frac{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 40}{0,45} (-3) \cdot 12 = -38,40 \cdot 10^{-3}$$

$$\left. \begin{aligned} 22,46X_1 + 7,67X_2 &= 89,60 \\ 7,67X_1 + 3,12X_2 &= 38,40 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} X_1 &= -1,27 \\ X_2 &= +14,63 \end{aligned} .$$

$$\dot{M}_{C,\Delta t} = 0 + (-1,27) \cdot (-7) + 14,63 \cdot (-3) = -35$$

$$\dot{M}_{F,\Delta t} = 0 + (-1,27) \cdot (-4) + 14,63 \cdot 0 = 5,08$$

–  $t=30^\circ\text{C}$  στη ράβδο FL

$$f_{1t} = S_1 \text{ at } l = 0$$

$$f_{2t} = S_2 \text{ at } l = 1 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 30 \cdot 12 = 4,32 \cdot 10^{-3}$$

$$\left. \begin{aligned} 22,4X_1 + 7,67X_2 &= 0 \\ 7,67X_1 + 3,12X_2 &= -4,32 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} X_1 &= 2,80 \\ X_2 &= -8,18 \end{aligned}$$

$$\dot{M}_{C,t} = 0 + 2,80 \cdot (-7) + (-8,18) \cdot (-3) = 4,94$$

$$\dot{M}_{F,t} = 0 + 2,80 \cdot (-4) + (-8,18) \cdot 0 = -11,20$$

–  $\Delta\varphi = 0,01$  rad στο σημείο K.

$$f_{1\Delta\varphi} = (-7) \cdot 0,01 = -70 \cdot 10^{-3}$$

$$f_{2\Delta\varphi} = (-3) \cdot 0,01 = -30 \cdot 10^{-3}$$

$$\left. \begin{aligned} 22,4X_1 + 7,67X_2 - 70 &= 0 \\ 7,67X_1 + 3,12X_2 - 30 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} X_1 &= -0,99 \\ X_2 &= 11,43 \end{aligned}$$

$$\dot{M}_{C,\Delta\varphi} = -0,99 \cdot (-7) + 11,43 \cdot (-3) = -27,36$$

$$\dot{M}_{F,\Delta\varphi} = -0,99 \cdot (-4) = 3,96$$

–  $u=1$  cm της στήριξης A

$$f_{1u} = -1 \cdot 10^{-2} = -10 \cdot 10^{-3}$$

$$f_{2u} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} 22,4X_1 + 7,67X_2 - 10 &= 0 \\ 7,67X_1 + 3,12X_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} X_1 &= 2,64 \\ X_2 &= -6,49 \end{aligned}$$

$$\dot{M}_{C,u} = 2,64 \cdot 7 - 6,49 \cdot (-3) = 0,99$$

$$\dot{M}_{F,u} = 2,64 \cdot (-4) = -10,56$$

**Παράδειγμα 13.5** Στο δικτύωμα του σχ. 13.7 να βρεθούν οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων για τα αίτια:

α) Εξωτερική φόρτιση.

β) Θερμοκρασιακή μεταβολή  $t=20^\circ\text{C}$  των εξωτερικών ράβδων.

γ) Διαφορά συναρμογής  $\Delta l=6$  mm στη ράβδο (3,5)

$$EF_r = 105 \cdot 10^3 \text{ kN} \quad \alpha = 10^{-5} \text{ grad}^{-1} \quad \text{για όλες τις ράβδους.}$$

**α)** Το δικτύωμα εσωτερικά είναι δύο φορές υπερστατικό ενώ εξωτερικά είναι ισοστατικό. Επιλέγονται σαν υπεράριθμα μεγέθη οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων  $S_{24}=X_1$  και  $S_{26}=X_2$  οπότε προκύπτει το Κ.Σ του σχήματος.

*Δείκτες ευκαμψίας*

Οι τιμές των αξονικών δυνάμεων των ραβδών από την επίλυση του Κ.Σ για  $X_1=1$  και  $X_2=1$  αναγράφονται πάνω στα σχήματα. Από τις τιμές του πιν. 13.1

και από τον τύπο (πιν. 10.3)

$$f_{ij} = \sum_r \frac{S_{r,i} S_{r,j} l_r}{EF_r} = \frac{1}{EF_r} \sum_r S_{r,i} S_{r,j} l_r$$

προκύπτει

$$f_{11} = \frac{14,486}{EF_r} = 0,138 \cdot 10^{-3} \quad f_{12} = \frac{1,5}{EF_r} = 0,014 \cdot 10^{-3} \quad f_{22} = \frac{14,486}{EF_r} = 0,138 \cdot 10^{-3} .$$

*Φορτιστικοί όροι*

Οι τιμές των αξονικών δυνάμεων των ράβδων από την επίλυση του Κ.Σ για την εξωτερική φόρτιση αναγράφονται πάνω στο σχήμα.

Σύμφωνα με τις τιμές του πιν. 13.1 είναι

$$f_{1p} = \sum_r \frac{S_{r,1} S_{r,p} l_r}{EF_r} = - \frac{38,79}{EF_r} \quad f_{2p} = \sum_r \frac{S_{r,2} S_{r,p} l_r}{EF_r} = \frac{286,05}{EF_r} .$$

*Συνθήκες συμβιβαστού των μετακινήσεων*

$$\left. \begin{array}{l} f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + f_{1p} = 0 \quad 14,486X_1 + 1,5X_2 - 38,79 = 0 \\ f_{21}X_1 + f_{22}X_2 + f_{2p} = 0 \quad 1,5X_1 + 14,486X_2 + 286,05 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X_1 = +4,774 \\ X_2 = -20,241 \end{array}$$

*Υπολογισμός των  $\dot{S}_{r,p}$*

Οι  $\dot{S}_{r,p}$  υπολογίζονται από την εξίσωση

$$\dot{S}_{r,p} = S_{r,p} + S_{r,1} X_1 + S_{r,2} X_2$$

και υπάρχουν στην τελευταία στήλη του πιν. 13.1.

**β)** Θερμοκρασιακή μεταβολή  $t=20^\circ\text{C}$  των εξωτερικών ράβδων.

*Φορτιστικοί όροι*

Σύμφωνα με τις τιμές του πιν. 13.2 είναι

$$f_{1t} = \sum_r S_{r,1} \alpha t_r l_r = -1,273 \cdot 10^{-3} \quad f_{2t} = \sum_r S_{r,2} \alpha t_r l_r = -1,273 \cdot 10^{-3} .$$

*Συνθήκες συμβιβαστού των μετακινήσεων*

$$\left. \begin{array}{l} 0,138X_1 + 0,014X_2 - 1,273 = 0 \\ 0,014X_1 + 0,138X_2 - 1,273 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X_1 = 8,375 \\ X_2 = 8,375 \end{array} .$$

*Υπολογισμός των  $\dot{S}_{r,t}$*

Από την εξίσωση  $\dot{S}_{r,t} = S_{r,1} X_1 + S_{r,2} X_2$  προκύπτει

$$\dot{S}_{12} = \dot{S}_{23} = \dot{S}_{34} = \dot{S}_{45} = \dot{S}_{56} = \dot{S}_{61} = -5,921 \quad \dot{S}_{25} = -11,842$$

$$\dot{S}_{15} = \dot{S}_{26} = \dot{S}_{24} = \dot{S}_{35} = 8,375$$

γ) Διάφορα συναρμογής  $\Delta l = 6 \text{ mm}$  στη ράβδο (3,5)

Φορτιστικοί όροι

$$f_{1\Delta l} = \sum S_{r,i} \Delta l_r = 1 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{-3} \quad f_{2\Delta l} = 0 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 0.$$

Συνθήκες συμβιβαστού των μετακινήσεων

$$\left. \begin{array}{l} 0,138X_1 + 0,014X_2 + 6 = 0 \\ 0,014X_1 + 0,138X_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X_1 = -43,93 \\ X_2 = +4,457 \end{array}$$

Υπολογισμός των  $\dot{S}_{r,\Delta l}$

Από την εξίσωση  $\dot{S}_{r,\Delta l} = S_{r,1}X_1 + S_{r,2}X_2$  προκύπτει

$$S_{12} = S_{16} = S_{56} = -3,151 \quad S_{15} = S_{26} = +4,457 \quad S_{25} = +27,907$$

$$S_{23} = S_{34} = S_{45} = +31,058 \quad S_{35} = S_{24} = -43,93$$

Πίνακας 13.1

Ράβδοι	$S_{r,1}$	$S_{r,2}$	$S_{r,p}$	$l_r$	$S_{r,1}^2 l_r$	$S_{r,2}^2 l_r$	$S_{r,1}S_{r,2} l_r$	$S_{r,1}S_{r,p} l_r$	$S_{r,2}S_{r,p} l_r$	$\dot{S}_{r,p}$
(12)	0	-0,707	+10	3	0	+1,5	0	0	-21,21	+24,310
(16)	0	-0,707	0	3	0	+1,5	0	0	0	+14,310
(15)	0	+1	+42,43	4,243	0	+4,243	0	0	+180	+22,189
(25)	-0,707	-0,707	-20	3	+1,5	+1,5	+1,5	+42,42	+42,42	-9,065
(56)	0	-0,707	-40	3	0	+1,5	0	0	+84,84	-25,690
(23)	-0,707	0	+10	3	+1,5	0	0	-21,21	0	+6,625
(34)	-0,707	0	0	3	+1,5	0	0	0	0	-3,375
(35)	+1	0	-14,14	4,243	+4,243	0	0	-60	0	-9,366
(45)	-0,707	0	0	3	+1,5	0	0	0	0	-3,375
(24): $X_1$	+1	0	0	4,243	+4,243		0	0	0	+4,774
(26): $X_2$	0	+1	0	4,243		+4,243	0	0	0	-20,241
Σύνολο					+14,486	+14,486	+1,5	-38,79	286,05	

Πίνακας 13.2

Ράβδος	$S_{r,1}$	$S_{r,2}$	$l_r$	$t_r$	$S_{r,1}at_r l_r$	$S_{r,2}at_r l_r$
(12)	0	-0,707	3	20	0	$42,42 \cdot 10^{-5}$
(23)	-0,707	0	3	20	$-42,42 \cdot 10^{-5}$	
(34)	-0,707	0	3	20	$-42,42 \cdot 10^{-5}$	
(45)	-0,707	0	3	20	$-42,42 \cdot 10^{-5}$	
(56)	0	-0,707	3	20	0	$42,42 \cdot 10^{-5}$
(61)	0	-0,707	3	20	0	$42,42 \cdot 10^{-5}$
Σύνολο					$-127,26 \cdot 10^{-5}$	$-127,26 \cdot 10^{-5}$