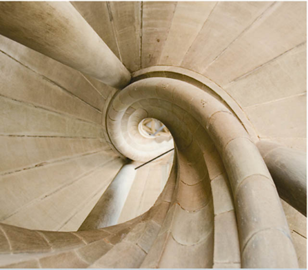
Ευάγγελος Ψωμόπουλος

Γραμμική Άλγεβρα
II



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Πρόλογος

Η Γραμμική Άλγεβρα είναι ένα σημαντικό συστατικό στο πρόγραμμα σπουδών, όχι μόνο των Μαθηματικών, αλλά και άλλων τμημάτων, όπως είναι τα τμήματα Φυσικής, Χημείας, Πληροφορικής, των τμημάτων του Πολυτεχνείου, κλπ. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η Γραμμική Άλγεβρα καλείται να βοηθήσει πολλούς κλάδους επιστημών, ώστε να γίνουν περισσότερο κατανοητοί, και ευκολότερα διαχειρίσιμοι.

Οι ανάγκες, όμως, της κάθε επιστήμης δεν είναι ίδιες. Ένας φοιτητής του Πολυτεχνείου ενδιαφέρεται μόνο για το αποτέλεσμα, και τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να το πετύχει. Δεν ενδιαφέρεται σχεδόν ποτέ για το λόγο, για τον οποίο χρησιμοποιεί αυτή τη μεθοδολογία, και όχι κάποια άλλη. Δεν συμβαίνει, όμως, το ίδιο για τους φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος, οι οποίοι, χωρίς να παραβλέπουν το υπολογιστικό μέρος των προβλημάτων, πρέπει να γνωρίζουν τι κρύβεται πίσω από τις διάφορες μεθοδολογίες.

Επιπλέον, η Γραμμική Άλγεβρα, που αφορά ένα τμήμα Μαθηματικών, πρέπει να αποτελεί ταυτόχρονα και μια εισαγωγή σε αυτό που ονομάζουμε μαθηματική αφαίρεση, με στόχο να βοηθήσει τους φοιτητές να εξοικειωθούν με τη μαθηματική σκέψη. Ο στόχος αυτός επιτυγχάνεται με τη λογική επιχειρηματολογία, και τη θεωρητική ανάπτυξη απλών, και μερικές φορές, γνωστών εννοιών, προσιτών σε όλους τους φοιτητές.

Το βιβλίο αυτό περιέχει τη διδακτέα ύλη που αντιστοιχεί στο υποχρεωτικό εξαμηνιαίο μάθημα Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ, που διδάσκεται στο Τμήμα Μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, και αποτελεί συνέχεια του βιβλίου «Γραμμική Άλγεβρα Ι».

Το βιβλίο «Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ» χωρίζεται σε τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο αναπτύσσεται η μεθοδολογία επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Στο δεύτερο συνεχίζεται η μελέτη των γραμμικών συναρτήσεων, και των πινάκων. Ο στόχος εδώ είναι να πάρουμε, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, απλούστερες μορφές συγκεκριμένων πινάκων. Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια του μέτρου ενός διανύσματος, με αποτέλεσμα ο διανυσματικός χώρος να μοιάζει με τον γεωμετρικό διανυσματικό χώρο. Οι ομοιότητες με τη Γεωμετρία είναι πολλές, όμως η αντιμετώπιση των διανυσματικών χώρων εξακολουθεί να είναι αλγεβρική. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο θα δούμε την έννοια της τετραγωνικής μορφής. Επίσης, με εφαρμογή της έννοιας αυτής, αναπτύσσεται η μεθοδολογία αναγνώρισης καμπύλων, και επιφανειών δευτέρου βαθμού.

Η θεωρία εμπλουτίζεται με πολλά παραδείγματα, τα οποία αποσκοπούν στην καλύτερη κατανόηση των εννοιών της Γραμμικής Άλγεβρας. Σχεδόν κάθε παράγραφος συνοδεύεται από ασκήσεις, πολλές από τις οποίες είναι απλή εφαρμογή της θεωρίας, ενώ άλλες την επεκτείνουν.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει μια συλλογή ασκήσεων, οι οποίες στηρίζονται σε όλα τα θέματα που αναπτύσσονται στη θεωρία. Για κάθε μια από αυτές δίνεται αναλυτική υπόδειξη.

Θεσσαλονίκη – Δεκέμβριος 2003 Ευάγγελος Ψωμόπουλος

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1
Γραμμικά Συστήματα

Τα γραμμικά συστήματα εμφανίζονται σχεδόν σε όλες τις θετικές επιστήμες, και ίσως όχι μόνον σε αυτές. Τα βλέπουμε σχεδόν πάντοτε σε περιπτώσεις πειραμάτων, όπου κανείς είναι αναγκασμένος να θεωρήσει πολλές παραμέτρους, και να κάνει διάφορες μετρήσεις.

Όπως και στην περίπτωση της «Γραμμικής Άλγεβρας Ι», το σώμα $\mathbb{K}$ θα είναι πάντοτε είτε το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών, είτε το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

1.1 m εξισώσεις με n αγνώστους

Ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους, και συντελεστές από ένα σώμα $\mathbb{K}$, έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots& \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1.1}$$

όπου οι συντελεστές a_{ij} των αγνώστων x_1, x_2, ..., x_n, όπως επίσης και οι σταθεροί όροι b_i των εξισώσεων είναι όλα στοιχεία του σώματος $\mathbb{K}$. Στο σύστημα αυτό μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots& \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο προκύπτει από το προηγούμενο, αν όλοι οι σταθεροί όροι αντικατασταθούν με μηδέν.

Το πρόβλημα της επίλυσης του συστήματος (1.1) είναι η εύρεση συγκεκριμένων τιμών των αγνώστων x_1, x_2, ..., x_n, έτσι ώστε όλες οι εξισώσεις του συστήματος να ικανοποιούνται ταυτόχρονα. Όπως θα δούμε σύντομα, δεν είναι βέβαιο ότι το σύστημα αυτό έχει πάντοτε λύση. Ακόμη και στην περίπτωση που υπάρχει μια λύση, δεν είναι βέβαιο ότι η λύση αυτή είναι μοναδική.

Αυτό σημαίνει ότι πρέπει πρώτα να εξετάσουμε αν υπάρχει λύση του συστήματος αυτού, και στη συνέχεια να βρούμε τη λύση εφόσον υπάρχει.

Είναι προφανές ότι οι συντελεστές a_{ij} του συστήματος σχηματίζουν ένα $m \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

που είναι γνωστός σαν πίνακας του συστήματος. Επίσης, οι σταθεροί όροι του συστήματος σχηματίζουν ένα $m \times 1$ πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

που είναι γνωστός σαν πίνακας των σταθερών. Έτσι, αν συμβολίσουμε τους αγνώστους σαν ένα $n \times 1$ πίνακα

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

τότε το σύστημα (1.1) θα πάρει μια πολύ πιο σύντομη μορφή

$$A \cdot X = B$$

την οποία θα χρησιμοποιούμε συχνά, όταν αναφερόμαστε στο σύστημα (1.1). Η μορφή αυτή έχει ένα ακόμη πλεονέκτημα, διότι μετατρέπει το σύστημα αυτό σε μια εξίσωση πινάκων. Οι πίνακες θα μας οδηγήσουν στα πρώτα συμπεράσματα που αφορούν τα συστήματα. Πριν προχωρήσουμε, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, αν ο πίνακας

A είναι αντιστρέψιμος, τότε η λύση του συστήματος βρίσκεται με ένα απλό πολλαπλασιασμό. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.1 Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Φυσικά το σύστημα αυτό μπορεί να γραφεί στη μορφή $A \cdot X = B$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Επειδή $\det(A) = -1$, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, και ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Επομένως η λύση του συστήματος θα είναι

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ 22 \end{pmatrix}$$

δηλαδή $x_1 = -3$, $x_2 = 17$, και $x_3 = 22$.▲

Είναι γνωστό ότι κάθε πίνακας παριστά μια γραμμική συνάρτηση και αντίστροφα. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο πίνακας A του συστήματος παριστά τη γραμμική συνάρτηση $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$, ως προς τις συνήθεις βάσεις των χώρων αυτών. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας στήλη X είναι το διάνυσμα $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}^n$, ενώ ο πίνακας B είναι το διάνυσμα $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ του χώρου $\mathbb{K}^m$. Βλέπουμε λοιπόν ότι η επίλυση του συστήματος $A \cdot X = B$, ανάγεται στην εύρεση ενός διανύσματος $\boldsymbol{x}$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $f_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$.

Είναι προφανές ότι, αν το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ δεν ανήκει στην εικόνα $f_A(\mathbb{K}^n)$ της συνάρτησης f_A, τότε δεν υπάρχει διάνυσμα $\boldsymbol{x}$, το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση $f_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$. Άρα δεν υπάρχει λύση του συστήματος $A \cdot X = B$.

Αν το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ ανήκει στην εικόνα $f_A(\mathbb{K}^n)$ της συνάρτησης f_A, τότε ασφαλώς υπάρχει διάνυσμα $\boldsymbol{x}$, το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση $f_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$. Άρα υπάρχει λύση του συστήματος $A \cdot X = B$. Η λύση αυτή μπορεί να μην είναι μοναδική, διότι η συνάρτηση f_A μπορεί να μην είναι αμφιμονότιμη.

Ο ***επαυξημένος πίνακας*** του συστήματος $A \cdot X = B$ προκύπτει από τον πίνακα A, αν προσθέσουμε στο τέλος τον πίνακα στήλη B, και συμβολίζεται με $(A|B)$. Δηλαδή θα έχουμε

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Στο εξής κάθε φορά που θα αναφερόμαστε στο σύστημα $A \cdot X = B$, δηλαδή στο σύστημα (1.1), θα θεωρούμε ότι το σύστημα αυτό συνοδεύεται από τον πίνακα του συστήματος A, τον πίνακα των σταθερών όρων B, τον επαυξημένο πίνακα $(A|B)$, καθώς επίσης από τη συνάρτηση $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$, με πίνακα A ως προς τις συνήθεις βάσεις των χώρων αυτών, και τέλος από το διάνυσμα $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$, με συντεταγμένες τους σταθερούς όρους του συστήματος αυτού.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να έχουμε το πρώτο αποτέλεσμα, αν και με όσα είπαμε προηγουμένως, το αποτέλεσμα αυτό είναι σχεδόν αναμενόμενο.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.2 Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i). **Το σύστημα** $A \cdot X = B$ **έχει λύση.**

(ii). **Το διάνυσμα** $\boldsymbol{b}$ **ανήκει στην εικόνα** $f_A(\mathbb{K}^n)$ **της συνάρτησης** f_A**.**

(iii). **Το διάνυσμα** $\boldsymbol{b}$ **ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα** A**.**

(iv). **Ισχύει η σχέση** $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|B)$**.**

Α π ό δ ε ι ξ η. $(i) \Rightarrow (ii)$. Αν το σύστημα $A \cdot X = B$ έχει λύση τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_n$, τότε το διάνυσμα $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ του χώρου $\mathbb{K}^n$ ικανοποιεί τη σχέση $f_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$. Επομένως το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ ανήκει στην εικόνα της συνάρτησης f_A.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Έστω $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ και $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$ οι συνήθεις βάσεις των χώρων $\mathbb{K}^n$ και $\mathbb{K}^m$, αντίστοιχα. Αν το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ ανήκει στην εικόνα $f_A(\mathbb{K}^n)$ της γραμμικής συνάρτησης f_A, τότε θα υπάρχει κάποιο διάνυσμα

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

τέτοιο ώστε να ισχύει $f_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$. Αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} = f_A(\boldsymbol{x}) &= f_A(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = \\ &= x_1 f_A(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f_A(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_n f_A(\boldsymbol{e}_n). \end{aligned}$$

Είναι γνωστό ότι τα διανύσματα $f_A(\boldsymbol{e}_1), f_A(\boldsymbol{e}_2), \cdots, f_A(\boldsymbol{e}_n)$ είναι ουσιαστικά οι στήλες του πίνακα A, άρα η τελευταία ισότητα δείχνει ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A. Δηλαδή, το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα A.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Αν το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα A, τότε η στήλη B του πίνακα $(A|B)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A. Αυτό σημαίνει ότι θα ισχύει

$$\text{χώρος στηλών του πίνακα } A = \text{χώρος στηλών του πίνακα } (A|B).$$

Η τελευταία αυτή ισότητα ουσιαστικά δείχνει ότι $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B)$.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Υποθέτουμε, τώρα, ότι ισχύει $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B)$. Αυτό σημαίνει ότι η στήλη B του πίνακα $(A|B)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A, διότι διαφορετικά οι πίνακες A και $(A|B)$ δεν θα είχαν την ίδια βαθμίδα. Δηλαδή, υπάρχουν στοιχεία $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ του σώματος $\mathbb{K}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Είναι προφανές ότι η τελευταία σχέση οδηγεί στην ισότητα

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix},$$

δηλαδή το σύστημα $A \cdot X = B$ έχει σαν λύση τα στοιχεία $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$. ■

Το σημαντικότερο στοιχείο του προηγουμένου θεωρήματος είναι ότι συνδέει την ύπαρξη λύσης του συστήματος με τη βαθμίδα των πινάκων A και $(A|B)$. Πιο συγκεκριμένα

$$\text{Το σύστημα } A \cdot X = B \text{ έχει λύση} \Longleftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A|B).$$

Είναι προφανές ότι το αποτέλεσμα αυτό μας επιτρέπει να εξετάσουμε αν ένα σύστημα έχει λύση ή όχι. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.3 Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

του οποίου ο πίνακας A και ο επαυξημένος πίνακας $(A|B)$ είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{και } (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στους πίνακες αυτούς μπορούμε να βρούμε ότι $\text{rank}(A) = 2$, και $\text{rank}(A|B) = 3$. Άρα το σύστημα αυτό δεν έχει λύση.▲

Το επόμενο θεώρημα διερευνά την περίπτωση του ομογενούς συστήματος.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.4 Έστω $A \cdot X = 0$ ένα ομογενές σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους, και συντελεστές από το σώμα $\mathbb{K}$. Το σύνολο S_0 όλων των λύσεων του συστήματος $A \cdot X = 0$, αποτελεί ένα διανυσματικό υποχώρο του $\mathbb{K}^n$ διάστασης $n - \text{rank}(A)$. Επομένως, αν ισχύει $n > m$, τότε το ομογενές σύστημα $A \cdot X = 0$ έχει μη μηδενικές λύσεις.

Α π ό δ ε ι ξ η. Το σύνολο των λύσεων του συστήματος $A \cdot X = 0$ είναι

$$S_0 = \{X / A \cdot X = 0\} = \{\boldsymbol{x} / f_A(\boldsymbol{x}) = 0\} = Kerf_A$$

Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο S_0 αποτελεί υποχώρο του $\mathbb{K}^n$, εφόσον είναι ο πυρήνας της συνάρτησης $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$. Οπότε από την εξίσωση διάστασης προκύπτει

$$\dim S_0 = \dim \text{Ker}\, f_A = n - \dim f_A(\mathbb{K}^n) = n - \text{rank}(A).$$

Επειδή η βαθμίδα του A δεν μπορεί να ξεπεράσει τον αριθμό m, όταν ισχύει $n > m$, τότε η διάσταση του S_0 είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή το σύστημα $A \cdot X = 0$ έχει μη μηδενικές λύσεις. ■

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, αν γνωρίζουμε μια βάση του χώρου S_0, τότε μπορούμε να βρούμε οποιοδήποτε στοιχείο του χώρου, δηλαδή οποιαδήποτε λύση του ομογενούς συστήματος.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α **1.1.5** Θεωρούμε το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{R}$. Εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

του συστήματος βρίσκουμε

$$\begin{array}{rrr|crrr|crrr|crrr} 1 & 2 & -1 & & 1 & 2 & -1 & & 1 & 2 & -1 & & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & \Rightarrow & 0 & -3 & 3 & \Rightarrow & 0 & -3 & 3 & \Rightarrow & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & & 0 & -3 & 3 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Επομένως η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathrm{rank}(A) = 2$, οπότε η διάσταση του χώρου S_0 των λύσεων του συστήματος είναι $\dim S_0 = 3 - 2 = 1$. Αυτό σημαίνει ότι μια βάση του χώρου αυτού είναι ένα οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο του, δηλαδή μια οποιαδήποτε μη μηδενική λύση του συστήματος.

Μια τέτοια λύση μπορεί να βρεθεί είτε από το αρχικό σύστημα, είτε από το ισοδύναμο με αυτό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο προκύπτει από τις στοιχειώδεις πράξεις. Εύκολα βρίσκουμε ότι μια μη μηδενική λύση είναι $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Άρα ο χώρος των λύσεων του συστήματος θα είναι

$$S_0 = \{(-1, 1, 1)t / t \in \mathbb{R}\}.$$

Δηλαδή όλες οι λύσεις του δοθέντος συστήματος θα είναι $x_1 = -t$, $x_2 = t$, $x_3 = t$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Στην πραγματικότητα, θεωρήσαμε τον άγνωστο x_3 σαν παράμετρο, την οποία ονομάσαμε t, και υπολογίσαμε τους δύο άλλους αγνώστους με τη βοήθεια της παραμέτρου αυτής.▲

Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στην επίλυση του μη ομογενούς συστήματος $A \cdot X = B$.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.6 Έστω S το σύνολο όλων των λύσεων του συστήματος $A \cdot X = B$, και S_0 το σύνολο των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος. Αν s είναι μια οποιαδήποτε λύση του συστήματος $A \cdot X = B$, τότε ισχύει

$$S = \{s\} + S_0 = \{s + \xi / \xi \in S_0\}.$$

Α π ό δ ε ι ξ η. Αρχικά θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, σε αντίθεση με το σύνολο S_0, το σύνολο S δεν μπορεί να είναι διανυσματικός χώρος, εφόσον δεν μπορεί να περιέχει τη μηδενική λύση.

Αν $u \in S$, δηλαδή αν u είναι μια λύση του συστήματος $A \cdot X = B$, τότε θα έχουμε $A \cdot u = B$, οπότε προκύπτει

$$A \cdot (u - s) = A \cdot u - A \cdot s = B - B = 0.$$

Επομένως θα έχουμε $u - s \in S_0$, δηλαδή υπάρχει κάποιο στοιχείο $\xi \in S_0$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $u - s = \xi$. Αυτό σημαίνει ότι $u = s + \xi$, γεγονός που αποδεικνύει τη σχέση $S \subset \{s + \xi / \xi \in S_0\}$.

Αντίστροφα, έστω ότι $w \in \{s + \xi / \xi \in S_0\}$, δηλαδή $w = s + \zeta$, για κάποιο στοιχείο $\zeta \in S_0$ Τότε θα έχουμε

$$A \cdot w = A \cdot (s + \zeta) = A \cdot s + A \cdot \zeta = B + 0 = B.$$

Άρα προκύπτει ότι $w \in S$, δηλαδή έχουμε και τη σχέση $\{s + \xi / \xi \in S_0\} \subset S$, γεγονός που αποδεικνύει την ισότητα που θέλουμε. ■

Η σημασία του θεωρήματος αυτού προκύπτει από την ισότητα

$$S = \{s\} + S_0 = \{s + \xi / \xi \in S_0\}.$$

η οποία δείχνει ότι η γενική λύση ενός γραμμικού συστήματος $A \cdot X = B$, m εξισώσεων με n αγνώστους, είναι το άθροισμα της γενικής λύσης του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $A \cdot X = 0$, και μιας οποιασδήποτε λύσης του συστήματος $A \cdot X = B$.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.7 Θεωρούμε το μη ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - 4x_4 &= 9 \\ -x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6 \end{aligned}$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του συστήματος αυτού.

$$\begin{array}{rrrrr|crrrrr|crrrrr} 1 & 4 & -1 & 1 & 3 & & 1 & 4 & -1 & 1 & 3 & & 1 & 4 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 1 & -4 & 9 & \Rightarrow & 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & \Rightarrow & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & 5 & -6 & & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι η βαθμίδα του πίνακα A, και του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$ του συστήματος είναι 2, επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1.2(iv) το σύστημα που δόθηκε έχει λύση. Επίσης, επειδή $\text{rank}(A) = 2$ η διάσταση του χώρου των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος θα είναι $\dim S_0 = 4 - 2 = 2$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βρούμε δύο ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς συστήματος, οι οποίες θα αποτελέσουν τη βάση του χώρου S_0.

Από τις στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμο με το αντίστοιχο ομογενές του δοθέντος συστήματος. Από τις δύο αυτές εξισώσεις έχουμε

$$\begin{aligned} -x_3 + x_4 &= x_1 + 4x_2 \\ x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

οπότε δύο ανεξάρτητες λύσεις του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος θα είναι

$$\begin{aligned} x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 1 \\ x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -8, x_4 = -4 \end{aligned}$$

Επομένως ο χώρος των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος είναι

$$S_0 = \{(1,0,2,1)k + (0,1,-8,-4)\lambda / k, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Τώρα πρέπει να βρούμε μια λύση του αρχικού συστήματος. Από τις παραπάνω στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ x_3 - 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα. Από τις εξισώσεις αυτές θα έχουμε

$$-x_3 = 7 - 8x_2 - 2x_1 \text{ και } - x_4 = 4 + 4x_2 - x_1.$$

Άρα μια λύση του δοθέντος συστήματος θα είναι

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -7, \text{ και } x_4 = -4.$$

Επομένως, η γενική λύση του συστήματος θα είναι

$$\begin{aligned} S &= \{(0,0,-7,-4)\} + S_0 = \\ &= \{(0,0,-7,-4) + (1,0,2,1)k + (0,1,-8,-4)\lambda / k, \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Πιο συγκεκριμένα η γενική λύση είναι

$$x_1 = k, x_2 = \lambda, x_3 = -7 + 2k - 8\lambda, \text{ και } x_4 = -4 + k - 4\lambda. \blacktriangle$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι είναι δυνατόν να βρεθεί η γενική λύση ενός συστήματος με τα υπάρχοντα θεωρήματα.

Συνήθως, όμως, χρησιμοποιούνται διάφορες άλλες τεχνικές, οι οποίες είναι περισσότερο σύντομες, και αποτελεσματικές. Αν και βασίζονται στις στοιχειώδεις πράξεις, τις οποίες ήδη χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα, οι τεχνικές αυτές θα αναπτυχθούν στην επόμενη παράγραφο.

1.2 Ασκήσεις

Ά σ κ η σ η 1.2.1 Απαντήστε με σωστό ή λάθος στις παρακάτω προτάσεις.

(i) Κάθε σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει τουλάχιστον μια λύση.

(ii) Κάθε σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει το πολύ μια λύση.

(iii) Κάθε σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους έχει τουλάχιστον μια λύση.

(iv) Κάθε σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους έχει το πολύ μια λύση.

(v) Κάθε ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει τουλάχιστον μια λύση.

(vi) Κάθε ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει το πολύ μια λύση.

(vii) Αν το αντίστοιχο ομογενές σύστημα ενός γραμμικού συστήματος έχει μια λύση, τότε το αρχικό σύστημα έχει μια λύση.

(viii) Αν ο πίνακας ενός ομογενούς συστήματος n εξισώσεων με n αγνώστους είναι αντιστρέψιμος, τότε το σύστημα έχει μια μη μηδενική λύση.

(ix) Το σύνολο των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους είναι υποχώρος του $\mathbb{K}^n$.

Άσκηση 1.2.2 Αποδείξτε ή δώστε αντιπαράδειγμα στην παρακάτω πρόταση. Αν ο πίνακας A ενός γραμμικού συστήματος $A \cdot X = B$, m εξισώσεων με n αγνώστους, έχει βαθμίδα m, τότε το σύστημα έχει μια τουλάχιστον λύση. Υπόδειξη: Η συνάρτηση $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ είναι μια συνάρτηση επί.

Άσκηση 1.2.3 Έστω $A \cdot X = B$ ένα γραμμικό σύστημα, n εξισώσεων με n αγνώστους. Δείξτε ότι το σύστημα αυτό έχει ακριβώς μια λύση αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. ***Υπόδειξη***: Αν w είναι η μοναδική λύση του συστήματος, τότε θα ισχύει $\{w\} = \{w\} + S_0$. Επομένως $S_0 = 0$, οπότε ο ενδομορφισμός f_A θα είναι επιμορφισμός.

Άσκηση 1.2.4 Να προσδιοριστεί η διάσταση και μια βάση του χώρου των λύσεων των συστημάτων.

$$(a)\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right. \quad \text{και} \quad (b)\left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Ά σ κ η σ η 1.2.5 Αν $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ είναι η γραμμική συνάρτηση που ορίζεται με τη σχέση $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3)$, να προσδιοριστεί επακριβώς το σύνολο

$$A = f^{-1}(1, 11).$$

Ά σ κ η σ η 1.2.6 Αν $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ είναι ο ενδομορφισμός που ορίζεται με τη σχέση

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - 2x_3, x_1 + 2x_3)$$

να προσδιοριστούν τα δύο παρακάτω σύνολα $f^{-1}(1, 3, -2)$, και $f^{-1}(2, 1, 1)$.

Ά σ κ η σ η 1.2.7 Να προσδιοριστεί η διάσταση και μια βάση του χώρου των λύσεων των συστημάτων.

$$(a) \left\{ \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{και} \quad (b) \left\{ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

1.3 Τεχνικές επίλυσης συστήματος

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την εύρεση της λύσης του γραμμικού συστήματος $A \cdot X = B$, m εξισώσεων με n αγνώστους, επομένως σχεδόν πάντα θα θεωρούμε ότι το σύστημα έχει λύση, δηλαδή ικανοποιείται η σχέση $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B)$.

Η απλούστερη περίπτωση είναι το ***σύστημα Cramer*** , δηλαδή το σύστημα $A \cdot X = B$, n εξισώσεων με n αγνώστους, όπου ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Όπως είδαμε, η λύση ενός τέτοιου συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Αν θυμηθούμε ότι ο αντίστροφος ενός πίνακα δίνεται από την ισότητα

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)},$$

τότε η προηγούμενη σχέση θα πάρει τη μορφή

$$\det(A) \cdot X = \text{adj}(A) \cdot B.$$

Είναι προφανές ότι και τα δύο μέλη της ισότητας αυτής είναι πίνακες στήλη, εφόσον οι πίνακες X και B είναι αυτής της μορφής. Το στοιχείο που βρίσκεται στη θέση k του πρώτου μέλους είναι το στοιχείο

$$(\det(A))x_k,$$

ενώ το στοιχείο που βρίσκεται στην k θέση του δευτέρου μέλους είναι το στοιχείο

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} b_i,$$

όπου A_{ik} είναι ο συμπαράγοντας του στοιχείου a_{ik} του πίνακα A του συστήματος. Επομένως, εξισώνοντας τα δύο αυτά στοιχεία, καταλήγουμε στην ισότητα

$$(\det(A))x_k = \sum_{i=1}^{n} A_{ik} b_i, \text{ για κάθε } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το άθροισμα του δευτέρου μέλους είναι ουσιαστικά το ανάπτυγμα της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ως προς την k-στήλη. Άρα, τελικά, οι τιμές των αγνώστων σε ένα σύστημα Cramer δίνονται από τις σχέσεις

$$x_k = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.3.1 Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix},$$

είναι αντιστρέψιμος, επομένως το σύστημα που έχουμε είναι ένα σύστημα Cramer. Εύκολα υπολογίζεται ότι η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$\det(A) = 1.$$

Επομένως, σύμφωνα με τους τύπους Cramer, θα έχουμε

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$x_2 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

$$x_3 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -1. \blacktriangle$$

Φυσικά, ένα τυχαίο γραμμικό σύστημα δεν είναι σύστημα Cramer, άρα είναι απαραίτητο να βρούμε ένα τρόπο επίλυσης ενός τέτοιου συστήματος. Το θεώρημα που ακολουθεί αποτελεί μια σημαντική βοήθεια.

Θεώρημα 1.3.2 Έστω $A \cdot X = B$ ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους, και D ένας $m \times m$ αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε το σύστημα $(D \cdot A) \cdot X = D \cdot B$ είναι ισοδύναμο με το αρχικό. Δηλαδή τα συστήματα $A \cdot X = B$ και $(D \cdot A) \cdot X = D \cdot B$ έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Απόδειξη. Αν w είναι μια λύση του συστήματος $A \cdot X = B$, τότε

$$A \cdot w = B \Rightarrow D \cdot (A \cdot w) = D \cdot B \Rightarrow (D \cdot A) \cdot w = D \cdot B,$$

δηλαδή το w είναι και λύση του συστήματος $(D \cdot A) \cdot X = D \cdot B$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι w' είναι μια λύση του γραμμικού συστήματος $(D \cdot A) \cdot X = D \cdot B$, οπότε θα ισχύει

$$(D \cdot A) \cdot w' = D \cdot B \Rightarrow A \cdot w' = D^{-1}(D \cdot A) \cdot w' = D^{-1}(D \cdot B) = B.$$

Επομένως το w' είναι ταυτόχρονα και λύση του συστήματος $A \cdot X = B$. Δείξαμε, δηλαδή, ότι κάθε λύση του ενός συστήματος είναι λύση και του άλλου, άρα τα δύο συστήματα έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων. ■

Στο σημείο αυτό ας θυμηθούμε ότι πολλαπλασιασμός ενός πίνακα A με ένα αντιστρέψιμο πίνακα από αριστερά ισοδυναμεί με εκτέλεση στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του πίνακα A. Αυτό σημαίνει ότι αν εκτελέσουμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα A ενός συστήματος $A \cdot X = B$, είναι σαν να πολλαπλασιάζουμε το σύστημα με ένα αντιστρέψιμο πίνακα, άρα το σύστημα που θα προκύψει είναι ισοδύναμο με το αρχικό.

Η παρατήρηση αυτή μας επιτρέπει να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του συστήματος. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.3.3 Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος αυτού.

$$\left.\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right|$$

Στο σημείο αυτό θα μπορούσαμε να σταματήσουμε, οπότε το ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα, το οποίο προκύπτει είναι

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_2 - x_4 &= -1 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Ήδη το νέο σύστημα είναι πολύ απλούστερο από αυτό που δόθηκε. Μπορούμε, όμως, να συνεχίσουμε τις στοιχειώδεις πράξεις, με στόχο να πετύχουμε ένα απλούστερο σύστημα. Για το σκοπό αυτό οι στοιχειώδεις πράξεις εκτελούνται από την τελευταία γραμμή και προς τα πάνω. Έτσι, θα έχουμε

$$\begin{array}{ccccc|} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc|} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc|} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Το σύστημα που αντιστοιχεί στην νέα μορφή του επαυξημένου πίνακα προκύπτει αμέσως

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

και είναι ισοδύναμο με το σύστημα που δόθηκε. Η λύση του τελευταίου συστήματος είναι σχεδόν προφανής, και μάλιστα βλέπουμε ότι ένας από τους αγνώστους x_1 ή x_3 πρέπει να θεωρηθεί σαν παράμετρος. Έτσι, η γενική λύση του αρχικού συστήματος θα είναι $x_1 = 1 - k$, $x_2 = 2$, $x_3 = k$, $x_4 = 3$, για κάθε $k \in \mathbb{R}$.▲

Στο παρακάτω παράδειγμα εκτός από τους αγνώστους υπάρχουν και κάποιες παράμετροι που πρέπει να συνυπολογιστούν.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.3.4 Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + abx_2 + x_3 &= b \\ x_1 + bx_2 + ax_3 &= 1 \end{aligned}$$

όταν οι παράμετροι a και b παίρνουν οποιαδήποτε τιμή στο σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Θεωρούμε την ορίζουσα του πίνακα A του συστήματος

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = 2b - 3ab + a^3 b = b\,(a+2)\,(a-1)^2$$

Είναι προφανές ότι αν ισχύουν $a \neq 1, -2$, και $b \neq 0$, δηλαδή αν ο πίνακας A του συστήματος είναι αντιστρέψιμος, τότε το σύστημα είναι ένα σύστημα Cramer, οπότε η λύση του δίνεται από τους τύπους Cramer, και είναι

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = \frac{b\,(1-a)\,(b-a)}{b\,(a+2)\,(a-1)^2} = \frac{a-b}{(a+2)\,(a-1)}$$

$$x_2 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \frac{(a-1)\,(b+ab-2)}{b\,(a+2)\,(a-1)^2} = \frac{(b+ab-2)}{b\,(a+2)\,(a-1)}$$

$$x_3 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = \frac{b\,(1-a)\,(b-a)}{b\,(a+2)\,(a-1)^2} = \frac{a-b}{(a+2)\,(a-1)}$$

Επειδή οι παράμετροι a και b παίρνουν τιμές στο σώμα $\mathbb{R}$, πρέπει να εξετάσουμε το σύστημα για τις τιμές των παραμέτρων που εξαιρέσαμε.

Έστω ότι ισχύει $b = 0$. Τότε το αρχικό σύστημα θα πάρει τη μορφή

$$\begin{aligned} ax_1 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + ax_3 &= 1 \end{aligned}$$

από όπου προκύπτουν οι εξισώσεις $(a-1)x_1 = 1$, και $(a-1)x_1 = -1$, εφόσον ισχύει $x_3 = -x_1$. Είναι προφανές ότι οι εξισώσεις αυτές δεν συμβιβάζονται για οποιαδήποτε τιμή του a. Άρα το σύστημα που δόθηκε δεν έχει λύση όταν ισχύει $b = 0$.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι ισχύει $a = 1$, οπότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x_1 + bx_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + bx_2 + x_3 &= b \\ x_1 + bx_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Από τη μορφή που έχουν οι εξισώσεις αυτές προκύπτει ότι το σύστημα δεν έχει λύση όταν είναι $b \neq 1$, ενώ όταν ισχύει $b = 1$, η λύση του συστήματος είναι

$$x_1 = 1 - k - \lambda,\, x_2 = k,\, x_3 = \lambda, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι ισχύει $a = -2$. Τότε το αρχικό σύστημα θα πάρει τη μορφή

$$\begin{aligned} -2x_1 + bx_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2bx_2 + x_3 &= b \\ x_1 + bx_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Ο πίνακα του συστήματος αυτού προήλθε από τον πίνακα του αρχικού συστήματος για $a = -2$. Άρα η ορίζουσά του είναι μηδέν, οπότε η βαθμίδα του πίνακα είναι μικρότερη του 3. Αντίθετα, ο επαυξημένος πίνακας

$$\begin{pmatrix} -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & -2b & 1 & b \\ 1 & b & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

του συστήματος περιέχει την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3b - 6$$

η οποία δεν είναι μηδέν όταν ισχύει $b \neq -2$. Αυτό σημαίνει ότι, αν $b \neq -2$, τότε η βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα δεν είναι ίδια με τη βαθμίδα του πίνακα του συστήματος, άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Αν, τώρα, ισχύει $b = -2$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας μια οποιαδήποτε μέθοδο για την επίλυση του τελευταίου συστήματος βρίσκουμε ότι η λύση του είναι $x_1 = x_3 = 2k + 1$, $x_2 = k$, για κάθε $k \in \mathbb{R}$.

Τελειώνοντας πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για τις τιμές των παραμέτρων $a = 1$, -2, και $b = 0$, το αρχικό σύστημα είτε δεν ήταν συμβιβαστό, δηλαδή δεν είχε καμία λύση, είτε είχε άπειρες λύσεις, όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο.▲

Η μέθοδος που αναφέραμε παραπάνω χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις πράξεις, μπορεί να εφαρμοστεί και σε συστήματα που περιέχουν παραμέτρους.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.3.5 Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (1-a)x_3 &= a+2 \\ 2x_1 - ax_2 + 3x_3 &= a+2 \\ (1+a)x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

όταν η παράμετρος a παίρνει οποιαδήποτε τιμή στο σώμα $\mathbb{R}$. Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος αυτού

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1-a & a+2 \\ 2 & -a & 3 & a+2 \\ 1+a & -1 & 2 & 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1-a & a+2 \\ 0 & -2-a & 1+2a & -a-2 \\ 0 & -2-a & a^2+1 & -(a+1)(a+2) \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1-a & a+2 \\ 0 & -a-2 & 1+2a & -a-2 \\ 0 & 0 & a(a-2) & -a(a+2) \end{array}\right| \qquad (1.2)$$

Παρατηρούμε ότι οι πράξεις που έγιναν μέχρι τώρα δεν απαιτούσαν κάποια προϋπόθεση για την τιμή της παραμέτρου α. Αντίθετα, η παράμετρος αυτή θα μπορούσε να πάρει οποιαδήποτε τιμή.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι η τελευταία γραμμή θα είναι μη μηδενική όταν ισχύουν $a \neq 0$, και $a \neq \pm 2$. Στην περίπτωση αυτή, βέβαια, έχουμε ένα σύστημα Cramer, εφόσον η βαθμίδα του πίνακα του συστήματος είναι 3, και ταυτίζεται με τη βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα. Η λύση του συστήματος αυτού μπορεί να βρεθεί από τους τύπους Cramer, όμως μπορεί να εφαρμοστεί και κάποια άλλη μέθοδος.

Από τις στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (1-a)x_3 &= a+2 \\ -(a+2)x_2 + (1+2a)x_3 &= -(a+2) \\ a(a-2)x_3 &= -a(a+2) \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα. Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι θα είναι

$$x_3 = \frac{a+2}{a-2},$$

οπότε από τη δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε

$$x_2 = -\frac{a+3}{a-2}$$

ενώ η πρώτη εξίσωση μας δίνει

$$x_1 = \frac{1}{a-2}$$

Ασφαλώς οι τιμές αυτές ισχύουν για κάθε $a \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$.

Μένει, τώρα, να εξεταστούν οι τιμές της παραμέτρου α, τις οποίες έχουμε εξαιρέσει. Αν $a = 0$, από τη σχέση (1.2) θα έχουμε

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

οπότε η βαθμίδα του πίνακα του συστήματος είναι 2, και ταυτίζεται με τη βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα. Έτσι, το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -2x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

έχει λύση, η οποία είναι

$$x_1 = 4 - 3k, x_2 = k, x_3 = 2k - 2, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{R}.$$

Αν ισχύει $a = -2$, τότε από τη σχέση (1.2) θα έχουμε

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}$$

οπότε προκύπτει το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_3 &= 0 \\ 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

του οποίου η λύση είναι $x_1 = -x_2$, και $x_3 = 0$, όπως πολύ εύκολα προκύπτει από τις προηγούμενες εξισώσεις.

Τέλος, αν ισχύει $a = 2$, τότε από τη σχέση (1.2) θα έχουμε

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}$$

επομένως το σύστημα δεν έχει λύση, διότι ο επαυξημένος πίνακας έχει μεγαλύτερη βαθμίδα από τον πίνακα του συστήματος.▲

1.4 Ασκήσεις

Ά σ κ η σ η 1.4.1 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x - 3w &= -3 \end{aligned}$$

Ά σ κ η σ η 1.4.2 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= -15 \\ 5x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x + y + 3z &= 11 \\ 11x + 7y &= -30 \end{aligned}$$

Ά σ κ η σ η 1.4.3 Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των παρακάτω συστημάτων

$$(\alpha) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases} \quad (\beta) \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 8x_2 + x_3 - 4x_4 = 9 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$$

Ά σ κ η σ η 1.4.4 Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των συστημάτων

$$(\alpha) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 6x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 - x_5 = 6 \end{cases}$$