Φ. ΚΟΛΥΒΑ - ΜΑΧΑΙΡΑ
Ε. ΜΠΟΡΑ - ΣΕΝΤΑ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Θεωρία
Εφαρμογές

Θεσσαλονίκη 1995

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από τις συγγραφείς

ISBN 960-431-338-X

Φωτοστοιχειοθεσία - Εκτύπωση
Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18° χλμ. Θεσ/νίκης-Περαίας (στροφή Τριλόφου) ● Τ.Θ. 170 57
Θεσσαλονίκη 542 10 ● ☎ & Fax (0392) 72 222 (3 γραμμές)

Βιβλιοπωλείο
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 ● ☎ (031) 203 720
Θεσσαλονίκη 546 35 ● Fax (031) 211 305
e-mail: ziti@hyper.gr

Πρόλογος

Στον εικοστό αιώνα παρατηρείται μια συνεχώς αυξανόμενη χρήση της στατιστικής σ' όλες τις επιστήμες.

Είναι λοιπόν ουσιαστικό για τους φοιτητές των περισσοτέρων τμημάτων να αποκτήσουν κάποιες γνώσεις στις βασικές αρχές και στις τεχνικές της στατιστικής ανάλυσης.

Κύριος στόχος του βιβλίου αυτού είναι να δώσει με μαθηματική αυστηρότητα λύσεις σε στατιστικά προβλήματα, χωρίς όμως ο αναγνώστης να επιβαρυνθεί με θεωρητικές αποδείξεις. Απευθύνεται σε μαθηματικούς και μη μαθηματικούς. Υπάρχουν παράγραφοι και εφαρμογές (που σημειώνονται με ✻*) που η κατανόησή τους απαιτεί μαθηματική σκέψη και άλλες που απευθύνονται κυρίως σε χρήστες στατιστικής.*

Τα περισσότερα παραδείγματα είναι αντιπροσωπευτικά πραγματικών προβλημάτων που συναντώνται σε πειραματικές επιστήμες. Ορισμένες εφαρμογές έχουν γίνει με τη χρήση στατιστικών πακέτων για προσωπικούς υπολογιστές (PC), με κύριο στόχο την ερμηνεία των πληροφοριών που λαμβάνονται από τον υπολογιστή. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν τα στατιστικά πακέτα SPSS και Statgraphics του Α.Π.Θ.

Το βιβλίο αυτό αποτελείται από εννέα κεφάλαια που το καθένα περιλαμβάνει θεωρία, εφαρμογές και προτεινόμενες ασκήσεις και συνοδεύεται από τυπολόγιο. Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει μια συλλογή στατιστικών πινάκων που θεωρούνται απαραίτητοι για τη λύση των ασκήσεων.

Πιστεύουμε ότι καλύπτει όλα τα θέματα της στατιστικής εκτός από τα πολύ προχωρημένα και εξειδικευμένα.

Νοέμβριος 1995

Φ. Κολυβά - Μαχαίρα
Ε. Μπόρα - Σέντα

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο ***4: Εκτιμητική***

Κεφάλαιο **5: *Έλεγχοι υποθέσεων***

Κεφάλαιο **6: *Δοκιμασία* X^2**

Πίνακας συντμήσεων

α.δ.	ανάλυση διασποράς
β.ε.	βαθμοί ελευθερίας
δ.ε.	διάστημα εμπιστοσύνης
ε.τ.	ελαχίστων τετραγώνων
Κ.Ο.Θ.	Κεντρικό οριακό θεώρημα
π.σ.	ποσοστιαίο σημείο
σ.α.κ.	συνάρτηση αθροιστικής κατανομής
σ.π.π.	συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
σ.κ.	συνάρτηση κατανομής
σ.π.	συνάρτηση πιθανότητας
στ.σ.	στατιστική συνάρτηση
σ.σ.	στάθμη σημαντικότητας
τ.δ.	τυχαίο δείγμα
τ.μ.	τυχαία μεταβλητή

κεφάλαιο 1

Στοιχεία πιθανοτήτων

1.1. Εισαγωγή

Η Στατιστική είναι μια εφαρμόσιμη μαθηματική επιστήμη που σκοπό έχει να βοηθήσει στη μελέτη και κατανόηση των φαινομένων ή των ιδιοτήτων των πληθυσμών, χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που δίνει ένα μέρος μόνο του πληθυσμου ή του φαινομένου (**δείγμα**). Επειδή ούτε η μελέτη του συνόλου του πληθυσμού ούτε η εξ ολοκλήρου παρακολούθηση της εξέλιξης του φαινομένου είναι δυνατή, καταφεύγουμε στο **πείραμα** αν πρόκειται για μελέτη φαινομένου ή στη **δειγματοληψία** αν πρόκειται για πληθυσμό. Για να είναι αξιόπιστα τα συμπεράσματα, θα πρέπει το δείγμα να είναι **τυχαίο** και αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται.

Για να μελετηθούν οι ιδιότητες ή τα φαινόμενα, θα πρέπει να εκφρασθούν μαθηματικά, ώστε να γίνουν μαθηματικά προβλήματα τα οποία θα επιλυθούν και θα δώσουν τα αποτελέσματα. Έτσι λοιπόν θα πρέπει να υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των ιδιοτήτων ή των φαινομένων και κάποιων μαθηματικών εκφράσεων. Η απλούστερη αντιστοιχία είναι η περιγραφή με την βοήθεια της **θεωρίας των συνόλων.**

Ορισμός 1.1

Όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος αποτελούν το **δειγματοχώρο** που συμβολίζεται με S ή με Ω. Κάθε δυνατό αποτέλεσμα του πειράματος, δηλαδή κάθε σημείο του δειγματοχώρου, λέγεται **απλό γεγονός** ή **ενδεχόμενο,** ενώ ένα σύνολο απλών γεγονότων λέγεται **(σύνθετο) γεγονός.** Οι δειγματοχώροι που έχουν πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος σημείων λέγονται **διακριτοί,** ενώ αυτοί που έχουν μη αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων λέγονται **μη διακριτοί** ή **συνεχείς.**

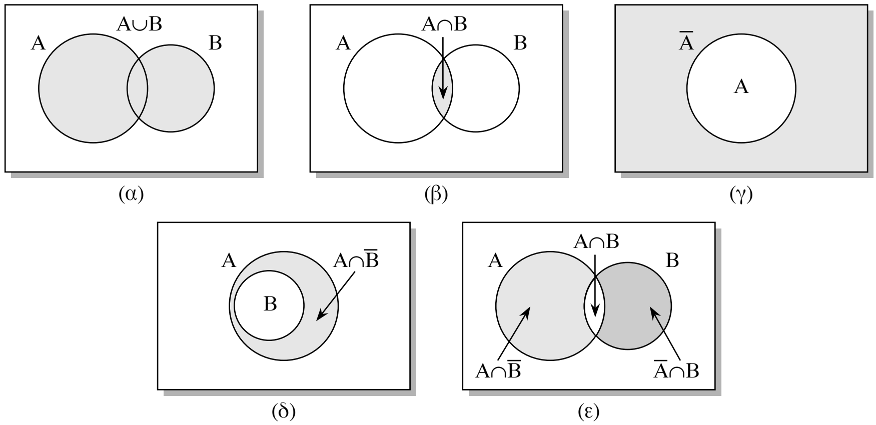
Π.χ. ο αριθμός των παιδιών σε μια οικογένεια είναι ένας διακριτός δειγματοχώρος ενώ το ύψος των ατόμων αποτελεί ένα συνεχή δειγματοχώρο.

Η αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων, των γεγονότων και των πράξεων τους, δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Γεγονότα	**Σύνολα**
δειγματοχώρος S ή Ω (βέβαιο γεγονός)	σύνολο αναφοράς S ή Ω
αδύνατο γεγονός	σύνολο $\varnothing$
απλό γεγονός	σύνολο A
δεν συμβαίνει το γεγονός A	σύνολο $\Gamma = \overline{A} = S - A$
τα γεγονότα A και B συμβαίνουν ταυτόχρονα	σύνολο $\Gamma = A \cap B = AB$
τουλάχιστον ένα από τα γεγονότα A, B συμβαίνει.	σύνολο $\Gamma = A \cup B = A + B$

(Στη θεωρία των πιθανοτήτων χάριν απλότητας, η ένωση συνόλων $A \cup B$ συμβολίζεται με $A+B$ και η τομή τους $A \cap B$ συμβολίζεται με AB).

Οι πράξεις μεταξύ των συνόλων δίνονται με τα παρακάτω διαγράμματα



Σχήμα 1.1

Ορισμός 1.2

Δύο γεγονότα A, B ονομάζονται **ασυμβίβαστα** ή **ξένα** όταν η πραγματοποίηση του ενός γεγονότος αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι:

$$A, B \text{ ασυμβίβαστα} \Leftrightarrow A \cap B = AB = \varnothing$$

Π.χ. το να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι είναι δύο γεγονότα ασυμβίβαστα.

Ορισμός 1.3

Δύο γεγονότα A, B είναι **στοχαστικά ανεξάρτητα** όταν η πραγματοποίηση του γεγονότος A δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του γεγονότος B και αντίστροφα.

Π.χ. το φύλο του πρώτου παιδιού είναι ανεξάρτητο από το φύλο του δεύτερου παιδιού σε μια οικογένεια.

Ένας από τους στόχους της θεωρίας των πιθανοτήτων είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας με την οποία συμβαίνουν τα διάφορα γεγονότα. Έχουν δοθεί διάφοροι ορισμοί για την πιθανότητα από τους οποίους οι επικρατέστεροι είναι οι δύο παρακάτω.

Ορισμός 1.4

Η πιθανότητα σαν όριο σχετικής συχνότητας:

«Αν στις N επαναλήψεις ενός πειράματος ένα γεγονός A εμφανίσθηκε N_A φορές, τότε το πηλίκο $f_A = N_A/N$ ονομάζεται **(σχετική) συχνότητα** του γεγονότος A. Όσο το N μεγαλώνει τόσο η σχετική συχνότητα σταθεροποιείται γύρω από έναν αριθμό που ονομάζεται **πιθανότητα του γεγονότος A** και συμβολίζεται με P(A)».

Π.χ αν θέλουμε την πιθανότητα να γεννηθεί κορίτσι, τότε το πείραμα είναι να καταγράψουμε το φύλο του νεογέννητου σε μία σειρά γεννήσεων. Πρόσφατα παρατηρήθηκε ότι στα 1000 παιδιά που γεννήθηκαν, τα 489 ήταν κορίτσια. Έτσι σύμφωνα με τον ορισμό 1.4 η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P = \frac{N_A}{N} = \frac{489}{1000} = 0{,}489.$$

Ορισμός 1.5

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας (Kolmogorov, 1930).

Η πιθανότητα είναι μια συνολοσυνάρτηση που ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

i) $P(S) = 1$

ii) $0 \le P(A) \le 1 \quad \forall\ A \subseteq S$

iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\kappa) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_\kappa) \quad \forall\ A_i \subseteq S$ και

$A_i \cap A_j = \varnothing, \ \forall\ i \neq j$ δηλαδή τα γεγονότα $A_1, \ldots, A_\kappa$ είναι ανά δύο **ασυμβίβαστα**.

Στην πράξη η πιθανότητα του γεγονότος A είναι

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}$$

Το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι το πλήθος όλων των απλών ενδεχομένων που συνιστούν το γεγονός A, ενώ πλήθος δυνατών περιπτώσεων είναι το πλήθος όλων των περιπτώσεων του πειράματος.

Π.χ. α) Η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι είναι $\frac{1}{2}$ διότι οι δυνατές περιπτώσεις είναι δύο (αγόρι-κορίτσι) και οι ευνοϊκές μία.

β) Η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα 4 με δύο ζάρια είναι $\frac{3}{36}$ διότι οι δυνατές περιπτώσεις είναι 36 (όσο και το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών που παράγονται από τους αριθμούς 1, 2,…, 6) ενώ το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι τρία (διότι άθροισμα 4 φέρουμε με τα ζεύγη (1, 3), (3, 1), (2, 2)).

Σύμφωνα με τα αξιώματα του ορισμού 1.5 μπορεί να δειχθεί ότι:

α) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ όταν τα γεγονότα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα

Απόδειξη

α) Εξ ορισμού ισχύει $A \cup \overline{A} = S$ και $A \cap \overline{A} = \varnothing$ οπότε σύμφωνα με τις ιδιότητες (i) και (iii) έχουμε:

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(S) = 1 \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

β) Το γεγονός $A \cup B$ μπορεί να γραφεί σαν ένωση τριών γεγονότων ξένων μεταξύ τους ανά δύο όπως φαίνεται και στα σχήματα 1.1(α) και 1.1(ε).

$$A \cup B = A\overline{B} + \overline{A}B + AB \Rightarrow P(A \cup B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB) \tag{1.1}$$

Εξάλλου κάθε γεγονός A μπορεί να γραφεί σαν ένωση δύο ξένων μεταξύ τους γεγονότων ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} A = AS = A(B \cup \overline{B}) = AB + A\overline{B} \Rightarrow P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) \\ B = BS = B(A \cup \overline{A}) = AB + \overline{A}B \Rightarrow P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; P(A) + P(B) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; P(A) + P(B) - P(AB) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB) \tag{1.2}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.1) και (1.2) αποδεικνύεται ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Η παραπάνω σχέση επεκτείνεται για τρία γεγονότα Α, Β, Γ ως εξής:

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma)$$

1.2. Δεσμευμένη πιθανότητα - Τύπος του Bayes

Πολλές φορές, μετά την εκτέλεση του πειράματος, η πληροφορία που παίρνουμε από το γεγονός Α μπορεί να μας κάνει να αναθεωρήσουμε την πιθανότητα P(B) που έχουμε για ένα άλλο γεγονός Β.

Ορισμός 1.6

Η πιθανότητα του Β όταν έχει συμβεί το Α ονομάζεται **δεσμευμένη πιθανότητα** του Β, συμβολίζεται με P(B/A) και έχει αποδειχθεί ότι:

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Αν ισχύει $P(B/A) = P(B)$, δηλαδή η πληροφορία για το Α δεν αλλάζει την πιθανότητα P(B), τότε τα γεγονότα Α και Β είναι **στοχαστικά ανεξάρτητα** και ισχύει:

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

Πράγματι αν $P(B) = P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)\,P(B)$.

Για να διαπιστώσουμε αν τρία γεγονότα Α, Β, Γ είναι ανεξάρτητα θα πρέπει να εξετάσουμε αν:

$$P(AB) = P(A)P(B),\ \ P(A\Gamma) = P(A)\,P(\Gamma),\ \ P(B\Gamma) = P(B)\,P(\Gamma)$$
$$\text{και}\ \ P(AB\Gamma) = P(A)\,P(B)\,P(\Gamma)$$

***ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1* (Bayes)**

Αν Α και Β είναι δύο γεγονότα με $P(B) > 0$ τότε

$$P(A/B) = \frac{P(A)\,P(B/A)}{P(B)}.$$

Απόδειξη

$$\left.\begin{aligned} P(A/B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} \\ P(B/A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A/B) = \frac{P(A)\,P(B/A)}{P(B)}.$$

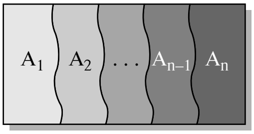
ΠΟΡΙΣΜΑ 1.1

Αν $B \subseteq S$ και $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, $A_i A_j = \varnothing \ \forall\ i \neq j$ τότε μπορεί να δειχθεί ότι:

$$P(A_\kappa/B) = \frac{P(A_\kappa B)}{P(B)} = \frac{P(A_\kappa)\cdot P(B/A_\kappa)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1) + \ldots + P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

Ο παραπάνω τύπος λέγεται **τύπος του Bayes** και μας δίνει την εκ των υστέρων (**posterior**) πιθανότητα του A_κ γνωρίζοντας ότι έχει συμβεί το B. Πριν την εκτέλεση του πειράματος γνωρίζουμε την εκ των προτέρων (**prior**) πιθανότητα $P(A_\kappa)$.

Θα πρέπει να τονισθεί ότι τα γεγονότα A_i, $i=1, 2, \ldots, n$ αποτελούν μια **διαμέριση** του δειγματοχώρου S, δηλαδή είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο και η ένωσή τους δίνει το S.



Σχήμα 1.2

1.3. Στοιχεία από τη συνδυαστική

1.3.1. Διατάξεις

Όταν έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα και τοποθετούμε στη σειρά r από τα αντικείμενα αυτά, έχουμε μία **διάταξη** των r αντικειμένων. Το πλήθος όλων των διαφορετικών διατάξεων r αντικειμένων από τα n, συμβολίζεται με $(n)_r$ και είναι:

$$(n)_r = n(n-1)\ldots(n-r+1)$$

Αν $r=n$, τότε έχουμε τις **μεταθέσεις** των n αντικειμένων, που το πλήθος τους είναι:

$$(n)_n = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n!$$

Π.χ. με τα ψηφία 1, 3, 5 μπορούμε να κάνουμε $3!=6$ διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς, ενώ με τα ψηφία 1, 3, 4, 5 $(4)_2 = 12$ διαφορετικούς διψήφιους αριθμούς.

1.3.2. Διατάξεις με επανάληψη

Όταν καθένα από τα n αντικείμενα μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές θέλουμε, τότε έχουμε **διατάξεις με επανάληψη** r αντικειμένων από τα n και το πλήθος τους είναι:

$$\boxed{n \times n \times \ldots \times n = n^r}$$

Π.χ. το πλήθος των στηλών που μπορούμε να συμπληρώσουμε στο ΠΡΟ-ΠΟ είναι 3^{13}.

1.3.3. Συνδυασμοί

Αν από τα n διαφορετικά αντικείμενα πάρουμε r χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξή τους αλλά μόνο ποιά αντικείμενα πήραμε, τότε έχουμε τους **συνδυασμούς** των n ανά r αντικειμένων που το πλήθος τους συμβολίζεται με $\binom{n}{r}$ και είναι:

$$\boxed{\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

Π.χ. το πλήθος των εξάδων που μπορούμε να συμπληρώσουμε στο ΛΟΤ-ΤΟ είναι $\binom{49}{6}$.

1.3.4. Μεταθέσεις με όμοια αντικείμενα

Αν τα n αντικείμενα δεν είναι όλα διαφορετικά αλλά υπάρχουν μόνον κ διαφορετικά αντικείμενα, τα $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\kappa$ και υπάρχουν r_1 αντικείμενα όμοια με το ω_1, r_2 αντικείμενα όμοια με το ω_2, ..., r_κ αντικείμενα όμοια με το ω_κ, όπου $r_1+r_2+\ldots+r_\kappa = n$, τότε οι διαφορετικές μεταθέσεις των n αντικειμένων είναι:

$$\boxed{\frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_\kappa!}}$$

Π.χ. με τους αριθμούς 1, 3, 3 μπορούμε να κάνουμε $\frac{3!}{2!\,1!} = 3$ διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς ενώ υπάρχουν $\frac{4!}{2!\,2!} = 6$ τρόποι να βάλουμε τα αντικείμενα Α, Α, Β, Β σε 4 κελιά.

1.3.5. Δειγματοληψία

Όταν έχουμε n στοιχεία και θέλουμε να πάρουμε από αυτά ένα δείγμα μεγέθους r, μπορούμε να το πραγματοποιήσουμε με τους εξής τρόπους:

i) Παίρνουμε ένα-ένα στοιχείο, το εξετάζουμε και το επανατοποθετούμε εκεί που το πήραμε πριν πάρουμε το επόμενο στοιχείο.
Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία μέχρι να πάρουμε r στοιχεία.
Στην περίπτωση αυτήν έχουμε **δειγατοληψία με επανάθεση** και υπάρχουν n^r διαφορετικά δείγματα.

ii) Παίρνουμε ένα- ένα στοιχείο, το εξετάζουμε και **δεν** το επανατοποθετούμε. Συνεχίζουμε μέχρι να πάρουμε r στοιχεία.
Εδώ έχουμε **δειγματοληψία χωρίς επανάθεση** και υπάρχουν
$(n)_r = n(n-1) \dots (n-r+1)$ τέτοια δείγματα.

iii) Παίρνουμε r στοιχεία μαζί. Τότε υπάρχουν $\binom{n}{r}$ δείγματα.

Στην περίπτωση **(i)** μπορεί να εμφανιστεί στο δείγμα το ίδιο στοιχείο μέχρι r φορές ενώ στις **(ii)** και **(iii)** όλα τα στοιχεία του δείγματος είναι διαφορετικά.

Αν στην **(ii)** δεν εξετάζουμε το στοιχείο όταν το παίρνουμε αλλά εξετάζουμε τα r στοιχεία στο τέλος της δειγματοληψίας, τότε είναι όπως η περίπτωση **(iii)**.

Με τη φράση **τυχαίο δείγμα** μεγέθους r θα εννοούμε ότι η δειγματοληψία γίνεται με τέτοιον τρόπο που όλα τα δείγματα μεγέθους r είναι ισοπίθανα.

Οι μεταθέσεις, διατάξεις κλπ, βοηθούν πολύ στον υπολογισμό των ευνοϊκών και των δυνατών περιπτώσεων οι οποίες χρειάζονται για να βρεθεί η πιθανότητα ενός γεγονότος θεωρούνται δε από τα πιο δύσκολα μαθηματικά προβλήματα.

Εφαρμογές - Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1.1

Ρίχνονται δύο ζάρια. Να παρασταθεί γραφικά ο δειγματικός χώρος των 36 αποτελεσμάτων σ' ένα σύστημα ορθογωνίων καρτεσιανών συντεταγμένων. Με τη βοήθεια αυτού να δοθούν τα αποτελέσματα και το πλήθος για τα παρακάτω ενδεχόμενα:

A = {Το άθροισμα να είναι διαιρετό διά 4}

B = {Και οι δύο αριθμοί να είναι άρτιοι}

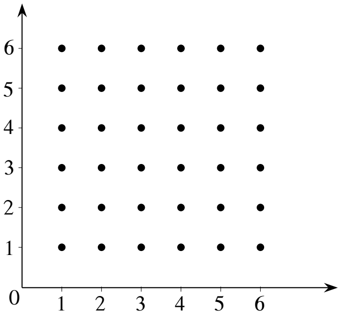
C = {Οι αριθμοί να είναι ίσοι}

D = {Οι αριθμοί να διαφέρουν τουλάχιστον κατά 4}

E = $A \cap B$, $C \cup D$, $B - A$, $\overline{A \cup B}$

Λύση

$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), \ldots, (6, 6)\}$



$A = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (2, 6), (6, 2), (6, 6)\}$, $n_A=9$

$B = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$, $n_B=9$

$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$, $n_C=6$

$D = \{(1, 5), (1, 6), (2, 6), (5, 1), (6, 1), (6, 2)\}$, $n_D=6$

$A \cap B = \{(2, 2), (2, 6), (4, 4), (6, 2), (6, 6)\}$, $n_{A \cap B}=5$

$C \cup D = \{(1, 1), \ldots, (6, 6), (1, 5), (1, 6), (2, 6), (5, 1), (6, 1), (6, 2)\}$, $n_{C \cup D}=12$

$B - A = \{(2, 4), (4, 2), (4, 6), (6, 4)\}$, $n_{B-A}=4$

$\overline{A \cup B} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5),$
$(3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$, $n_{\overline{A \cup B}}=23$

Άσκηση 1.2

Τρεις παίκτες A, B και C ρίχνουν κατά σειρά ένα ζάρι. Ο A θα κερδίσει όταν πετύχει 5 ή 6. Ο B όταν πετύχει άρτιο αριθμό και ο C θα κερδίσει όταν πετύχει περιττό αριθμό. Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε:

α) Να κερδίσει τελικά ο A
β) » » » » B
γ) » » » » C
δ) Ο C να ρίξει το ζάρι τουλάχιστον τρεις φορές

Λύση

$A_i = \{\text{Ο παίκτης A φέρνει 5 ή 6 στην i ρίψη}\}$

$B_i = \{\text{Ο παίκτης B φέρνει άρτιο αριθμό στην i ρίψη}\}$

$C_i = \{\text{Ο παίκτης C φέρνει περιττό αριθμό στην i ρίψη}\}$

$$P(A_i) = \frac{1}{3}, \quad P(B_i) = \frac{1}{2}, \quad P(C_i) = \frac{1}{2}$$

$A = \{\text{κερδίζει ο A}\}$

$B = \{\text{κερδίζει ο B}\}$

$C = \{\text{κερδίζει ο C}\}$

α) $A = A_1 + \overline{A}_1\,\overline{B}_1\,\overline{C}_1\,A_2 + \overline{A}_1\,\overline{B}_1\,\overline{C}_1\,\overline{A}_2\,\overline{B}_2\,\overline{C}_2\,A_3 + \ldots$

$$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{3} + \left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2\frac{1}{3} + \ldots = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \ldots\right] \Rightarrow$$

$$P(A) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{2}{5}$$

β) $B = \overline{A}_1\,B_1 + \overline{A}_1\,\overline{B}_1\,\overline{C}_1\,\overline{A}_2\,B_2 + \ldots$

$$P(B) = \frac{2}{3}\,\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2\frac{1}{2} + \ldots = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \ldots\right] \Rightarrow$$

$$P(B) = \frac{2}{5} \quad \text{και}$$

γ) $C = \overline{A}_1\,\overline{B}_1\,C_1 + \overline{A}_1\,\overline{B}_1\,\overline{C}_1\,\overline{A}_2\,\overline{B}_2\,C_2 + \ldots$

$$P(C) = \frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{6}\left[1 + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \ldots\right] \Rightarrow$$

$$P(C) = \frac{1}{6}\,\frac{6}{5} = \frac{1}{5}$$

δ) Αν $D = \{$ο C ρίχνει τουλάχιστον τρεις ζαριές$\}$

και $\overline{D} = \{$ο C ρίχνει το πολύ δύο φορές τα ζάρια$\} \Rightarrow$

$$\overline{D} = A_1 + \overline{A}_1 B_1 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 C_1 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{C}_1 \overline{A}_2 \overline{B}_2 C_2 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{C}_1 \overline{A}_2 \overline{B}_2 \overline{C}_2 A_3 +$$
$$+ \overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{C}_1 \overline{B}_2 \overline{C}_2 \overline{A}_3 B_3 \Rightarrow$$

$$P(\overline{D}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{3}\frac{1}{2} = 0{,}88$$

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{31}{36} = \frac{5}{36}$$

Άσκηση 1.3

Δύο φίλοι ρίχνουν ζάρια. Ο A ρίχνει τρία ζάρια μία φορά. Ο B ρίχνει τέσσερα ζάρια μία φορά.

i) Ποια η πιθανότητα να φέρει ο A άθροισμα 9;

ii) Ποια η πιθανότητα να φέρει ο B άθροισμα 12;

iii) Ο A παίζει μέχρι να φέρει άθροισμα 9 για πρώτη φορά. Ποια η πιθανότητα να σταματήσει στο τρίτο παιχνίδι (έφερε άθροισμα 9);

iv) Ο B παίζει τρία παιχνίδια. Ποια η πιθανότητα να φέρει άθροισμα 12 μία φορά; (σε κάθε παιχνίδι ρίχνει τα 4 ζάρια μία φορά).

Λύση

Ορίζουμε τα γεγονότα: $A = \{$ο A να φέρει άθροισμα 9 με τρία ζάρια$\}$

$B = \{$ο B να φέρει άθροισμα 12 με τέσσερα ζάρια$\}$

Οι δυνατές περιπτώσεις είναι 6^3 για τον A και 6^4 για το B. Για τις ευνοϊκές περιπτώσεις αρκεί να υπολογίσω το πλήθος των σημείων που αποτελούν τα A και B.

i) $(1, 6, 2)$ $\quad n_1 = \dfrac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6$

$(1, 5, 3)$ $\quad n_2 = \dfrac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6$

$(1, 4, 4)$ $\quad n_3 = \dfrac{3!}{1!\,2!} = 3$

$(2, 2, 5)$ $\quad n_4 = \dfrac{3!}{1!\,2!} = 3$

$(2, 4, 3)$ $\quad n_5 = \dfrac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6$

(3, 3, 3) $\quad n_6 = \frac{3!}{3!} = 1$

$P(A) = \frac{25}{6^3} = 0{,}12$

ii) (1, 1, 5, 5) $\quad n_1 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$

(1, 1, 4, 6) $\quad n_2 = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12$

(1, 2, 3, 6) $\quad n_3 = \frac{4!}{1!\,1!\,1!\,1!} = 24$

(1, 2, 4, 5) $\quad n_4 = \frac{4!}{1!\,1!\,1!\,1!} = 24$

(1, 3, 4, 4) $\quad n_5 = \frac{4!}{1!\,1!\,2!} = 12$

(1, 3, 5, 3) $\quad n_6 = \frac{4!}{1!\,1!\,2!} = 12$

(2, 2, 6, 2) $\quad n_7 = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$

(2, 2, 5, 3) $\quad n_8 = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12$

(2, 2, 4, 4) $\quad n_9 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$

(2, 3, 4, 3) $\quad n_{10} = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12$

(3, 3, 3, 3) $\quad n_{11} = \frac{4!}{4!} = 1$

$P(B) = \frac{125}{6^4} = 0{,}09$

iii) $A_k = \{$Ο Α φέρνει άθροισμα 9 στο k παιχνίδι$\}$

Το αποτέλεσμα του κάθε παιχνιδιού είναι ανεξάρτητο από τα άλλα παιχνίδια, δηλαδή τα γεγονότα $A_1, A_2, A_3, \ldots$ είναι ανεξάρτητα.

$$P(A_3) = P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,A_3) = P(\overline{A}_1)\,P(\overline{A}_2)\,P(A_3) = \left(1-\frac{25}{6^3}\right)^2 \frac{25}{6^3} = 0{,}093$$

iv) $B_{3,1} = \{$Ο Β φέρνει άθροισμα 12 σε 1 από τα 3 παιχνίδια$\}$

$B_k = \{$Ο Β φέρνει άθροισμα 12 στο k παιχνίδι$\}$

$$P(B_{3,1}) = P(B_1\,\overline{B}_2\,\overline{B}_3 + \overline{B}_1\,B_2\,\overline{B}_3 + \overline{B}_1\,\overline{B}_2\,B_3) = 3\cdot 0{,}09\cdot(0{,}91)^2 = 0{,}22$$

Άσκηση 1.4

Ρίχνουμε τρία ζάρια μία φορά. Να βρεθεί:

i) Η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα 7.

ii) Ποιο είναι πιθανότερο: άθροισμα 9 ή 11;

Λύση

Ο δειγματοχώρος έχει 6^3 σημεία.

$$A = \{\text{άθροισμα } 7\},$$
$$B = \{\text{άθροισμα } 9\},$$
$$\Gamma = \{\text{άθροισμα } 11\}.$$

Για να βρω τις πιθανότητες των γεγονότων A, B, Γ επειδή όλα τα σημεία του δειγματοχώρου είναι ισοπίθανα, αρκεί να υπολογίσω το πλήθος των σημείων που περιέχονται στα A, B, Γ.

i) Για το γεγονός A:

(1, 1, 5) $\quad n_1 = \dfrac{3!}{2!\,1!} = 3$

(1, 2, 4) $\quad n_2 = \dfrac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6$

(1, 3, 3) $\quad n_3 = \dfrac{3!}{1!\,2!} = 3$

(2, 2, 3) $\quad n_4 = \dfrac{3!}{2!\,1!} = 3$

$$P(A) = \frac{15}{6^3} = 0{,}07$$

ii) Για το γεγονός B:

(1, 2, 6) $\quad n_1=6$

(1, 3, 5) $\quad n_2=6$

(1, 4, 4) $\quad n_3=3$

(2, 2, 5) $\quad n_4=3$

(2, 3, 4) $\quad n_5=6$

(3, 3, 3) $\quad n_6=1$

$$P(B) = \frac{25}{6^3} = 0{,}12$$

Για το γεγονός Γ:

(1, 4, 6) $\quad n_1=6$

(1, 5, 5) $\quad n_2=3$

(2, 3, 6) $\quad n_3=6$

(2, 4, 5) $\quad n_4=6$

(3, 4, 4) $\quad n_5=3$

(3, 5, 3) $\quad n_6=3$

$$P(\Gamma) = \frac{27}{6^3} = 0{,}125$$

Συνεπώς $\quad P(\Gamma) > P(B)$

Άσκηση 1.5

Ένα κουτί περιέχει 10 άσπρα, 4 μαύρα και 2 κόκκινα μπαλάκια. Εάν πάρουμε δύο μπαλάκια χωρίς επανάθεση από το κουτί να υπολογισθεί η πιθανότητα, ώστε:

α) Και τα δύο να είναι άσπρα
β) Και τα δύο κόκκινα
γ) Τουλάχιστον ένα να είναι άσπρο
δ) Το πολύ ένα να είναι άσπρο
ε) Ακριβώς ένα να είναι άσπρο
στ) Κανένα κόκκινο
ζ) Κανένα άσπρο

Λύση

$A_i = \{$το δείγμα έχει i μπαλάκια άσπρα$\}$

$M_i = \{$το δείγμα έχει i μπαλάκια μαύρα$\}$

$K_i = \{$το δείγμα έχει i μπαλάκια κόκκινα$\}$

α) $$P(A_2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{6}{0}}{\binom{16}{2}} = \frac{45}{120} = 0{,}375$$

β) $$P(K_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{14}{0}}{\binom{16}{2}} = \frac{1}{120} = 0{,}008$$

γ) $$P(A_{i\geq 1}) = 1 - P(A_0) = 1 - \frac{\binom{10}{0}\binom{6}{2}}{\binom{16}{2}} = 1 - \frac{15}{120} = 0{,}875$$

δ) $$P(A_{i\leq 1}) = P(A_0) + P(A_1) = \frac{\binom{10}{0}\binom{6}{2} + \binom{10}{1}\binom{6}{1}}{\binom{16}{2}} = 0{,}625$$

ε) $P(A_1) = \dfrac{\binom{10}{1}\binom{6}{1}}{\binom{16}{2}} = \dfrac{60}{120} = 0{,}5$

στ) $P(K_0) = \dfrac{\binom{14}{2}\binom{2}{0}}{\binom{16}{2}} = \dfrac{91}{120} = 0{,}758$

ζ) $P(A_0) = \dfrac{\binom{10}{0}\binom{6}{2}}{\binom{16}{2}} = \dfrac{15}{120} = 0{,}125$

✻ *Άσκηση 1.6*

Δύο δοχεία Δ_1, Δ_2 περιέχουν αντίστοιχα α άσπρες και β μαύρες το Δ_1 και β άσπρες και α μαύρες μπάλες το Δ_2. Παίρνουμε n φορές από μία μπάλα κάθε φορά σύμφωνα με τον κανόνα:

α) Κάθε μπάλα που παίρνουμε επανατοποθετείται στο ίδιο δοχείο που την πήραμε

β) Αν η μπάλα που πήραμε είναι άσπρη, η επόμενη μπάλα επιλέγεται από το Δ_1

γ) Αν είναι μαύρη παίρνουμε την επόμενη από το Δ_2

δ) Παίρνουμε την πρώτη μπάλα από το Δ_1

Να βρεθούν:

i) Ποια η πιθανότητα η τελευταία μπάλα να είναι άσπρη;

ii) Αν P_n η παραπάνω πιθανότητα δείξτε ότι: $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Λύση

α′ τρόπος

Θεωρούμε τα γεγονότα:

$\Delta_i = \{$η μπάλα επιλέγεται από το Δ_i δοχείο$\}$ $\quad i=1, 2$

$A_\kappa = \{$επιλέγεται άσπρη μπάλα την κ φορά$\}$

$\overline{A}_\kappa = M_\kappa = \{$επιλέγεται μαύρη μπάλα την κ φορά$\}$

Ισχύουν: $\quad A_k = A_k(\Delta_1+\Delta_2) = A_k\,\Delta_1+A_k\,\Delta_2 \Rightarrow$

$$P(A_\kappa) = P(A_\kappa/\Delta_1)\,P(\Delta_1)+P(A_\kappa/\Delta_2)\,P(\Delta_2)$$

$$P(A_\varkappa/\Delta_1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad P(M_\varkappa/\Delta_1)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

$$P(A_\varkappa/\Delta_2)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \qquad P(M_\varkappa/\Delta_2)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Επίσης $\quad P(\Delta_1)=P(A_{\varkappa-1}), \qquad P(\Delta_2)=P(M_{\varkappa-1})$

σύμφωνα με τις συνθήκες β) και γ).
Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες $P(A_\varkappa)$, $P(M_\varkappa)$ σε κάθε στάδιο αρχίζοντας από $\varkappa=1$.

$\varkappa=1$ $\qquad P(A_1)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad P(M_1)=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$

$\varkappa=2$ $\qquad P(A_2)=P(A_2/\Delta_1)\,P(\Delta_1)+P(A_2/\Delta_2)\,P(\Delta_2)=$

$$=P(A_2/\Delta_1)\,P(A_1)+P(A_2/\Delta_2)\,P(M_1)=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}$$

$\varkappa=3$ $\qquad P(A_3)=P(A_3/\Delta_1)\,P(A_2)+P(A_3/\Delta_2)\,P(M_2)=\dfrac{\alpha^3+3\alpha\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}$

όμοια για $\varkappa=4$ $\quad P(A_4)=\dfrac{\alpha^4+6\alpha^2\beta^2+\beta^4}{(\alpha+\beta)^4}$

i) Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα $P(A_n)$ έχει σαν αριθμητή το άθροισμα των περιττών όρων του αναπτύγματος $(\alpha+\beta)^n$ δηλαδή:

$$\alpha^n+\binom{n}{2}\alpha^{n-2}\beta^2+\binom{n}{4}\alpha^{n-4}\beta^4+\ldots+\beta^n=\lambda$$

αν n άρτιο, και

$$\alpha^n+\binom{n}{2}\alpha^{n-2}\beta^2+\binom{n}{4}\alpha^{n-4}\beta^4+\ldots+\binom{n}{n-1}\alpha\beta^{n-1}=\lambda$$

αν n περιττό.

Παρατηρούμε ακόμη ότι:

$$\frac{(\alpha+\beta)^n-(\alpha-\beta)^n}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{\varkappa=0}^{n}\binom{n}{\varkappa}\alpha^\varkappa\beta^{n-\varkappa}(1-(-1)^\varkappa)\right\}=\lambda, \quad \text{οπότε:}$$

$$P_n=P(A_n)=\frac{\lambda}{(\alpha+\beta)^n}=\frac{(\alpha+\beta)^n-(\alpha-\beta)^n}{2(\alpha+\beta)^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^n$$

$$2P(A_n)-1=\frac{(\alpha-\beta)^n}{(\alpha+\beta)^n}\Rightarrow P(A_n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^n$$

ii) Επειδή $\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right|<1\Rightarrow\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ και $P(A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{1}{2}$

β΄ τρόπος

i) Παρατηρούμε ότι:

$$P(A_\varkappa) = P(A_{\varkappa-1})\, P(A_\varkappa/A_{\varkappa-1}) + P(\overline{A}_{\varkappa-1})\, P(A_\varkappa/\overline{A}_{\varkappa-1})$$

$$= P(A_{\varkappa-1})\,\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + (1-P(A_{\varkappa-1}))\,\frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

Θέτουμε $P(A_\varkappa) = \lambda_\varkappa \Rightarrow \lambda_1 = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ και $\lambda_\varkappa(\alpha+\beta) = \lambda_{\varkappa-1}(\alpha-\beta)+\beta$ $\varkappa=2, \ldots$

Αυτή είναι μία εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης με μερική λύση $\lambda'_\varkappa = \dfrac{1}{2}$

και γενική λύση: $\lambda_n = c\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^n + \dfrac{1}{2}$.

ii) Όμως $\lambda_1 = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \Rightarrow c = \dfrac{1}{2}$ και $\lambda_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Άσκηση 1.7

Να βρεθούν οι πιθανότητες ώστε μια οικογένεια με 5 παιδιά

α) Να υπάρχει τουλάχιστον ένα αγόρι

β) Ακριβώς δύο αγόρια

γ) Όλα να είναι αγόρια όταν το πρώτο είναι αγόρι.

Λύση

$$A_i = \{\text{υπάρχουν } i \text{ αγόρια στην οικογένεια}\}$$

α) $P(A_{i\geq 1}) = 1-P(A_0) = 1-\binom{5}{0}\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{31}{32}$

β) $P(A_2) = \binom{5}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{10}{32}$

γ) $P(A_5/A_1) = P(A_4) = \binom{4}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$

διότι το φύλο του κάθε παιδιού είναι ανεξάρτητο από τα άλλα.

Άσκηση 1.8

Σ' ένα λαβύρινθο υπάρχουν 4 διασταυρώσεις και σε κάθε διασταύρωση υπάρχουν τρεις κατευθύνσεις, αριστερά, δεξιά και ευθεία. Υπάρχει μόνο μία σωστή διαδρομή για την έξοδο. Ένας ποντικός διαλέγει κάθε κατεύθυνση με την ίδια πιθανότητα. Ποια η πιθανότητα να βρει τη σωστή έξοδο;

Λύση

A_i={ο ποντικός βρίσκει τη σωστή κατεύθυνση στην i διασταύρωση},
i=1, 2, 3, 4

A = {ο ποντικός βρίσκει την έξοδο}

Υποθέτουμε ότι κάθε διασταύρωση είναι ανεξάρτηση από τις άλλες. Έτσι:

$$P(A) = P(A_1\, A_2\, A_3\, A_4) = P(A_1)\; P(A_2)\; P(A_3)\; P(A_4) = \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$P(A) = 0{,}0123$$

Άσκηση 1.9

Σ' ένα παιχνίδι παρατηρούμε τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού των αυτοκινήτων που περνούν από το Συντριβάνι. Ποια είναι η πιθανότητα:

i) Τα δύο ακριβώς να είναι ίδια.

ii) Στα τέσσερα αυτοκίνητα που θα περάσουν, το ένα τουλάχιστον να έχει ακριβώς δύο από τα τελευταία 3 ψηφία ίδια.

Λύση

Παρατηρούμε τις 3-άδες (α, β, γ) όπου α, β, γ = 0, 1, 2, …, 9

i) Οι δυνατές περιπτώσεις είναι: $10{\cdot}10{\cdot}10 = 10^3$

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι: $10{\cdot}9 \cdot \dfrac{3!}{2!\,1!} = 270$

διότι υπάρχουν $\dfrac{3!}{2!1!}$ 3-άδες (α, β, β) με α, β= 0, 1, 2, …, 9 και α≠β και οι δυνατές περιπτώσεις για τα (α, β) είναι $10{\cdot}9$.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P = \dfrac{270}{10^3} = 0{,}27$

ii) $A_{4,\,\kappa}$ = {στα τέσσερα αυτοκίνητα τα κ να έχουν τα δύο ψηφία τους ίδια}

$P(A_{4,\,\kappa\geq 1}) = 1–P(A_{4,\,0}) = 1–(1–P)^4 = 1–(0{,}73)^4 = 0{,}716 \simeq 0{,}72$

Άσκηση 1.10

Ένα αρτοποιείο φτιάχνει 80 ψωμιά κάθε μέρα. Απ' αυτά τα 10 είναι μικρότερου βάρους από το κανονικό. Σ' έναν έλεγχο ο ελεγκτής ζυγίζει 5 ψωμιά. Ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί ψωμί μικρότερου βάρους;

Λύση

$$B = \{\text{στα } 5 \text{ ψωμιά υπάρχει ψωμί μικρότερου βάρους}\}$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{\binom{70}{5}\binom{10}{0}}{\binom{80}{5}} = 0{,}5$$

Άσκηση 1.11

Σε μια χώρα το 15% των αντρόγυνων ψηφίζουν το ίδιο κόμμα A, τα 21% των ανδρών ψηφίζουν το κόμμα A και το 28% των γυναικών ψηφίζουν το κόμμα A. Ποια είναι η πιθανότητα το κόμμα A να πάρει τουλάχιστο μία ψήφο από ένα ζευγάρι;

Λύση

$A = \{\text{ο άνδρας ψηφίζει το κόμμα } A\}$

$B = \{\text{η γυναίκα ψηφίζει το κόμμα } A\}$

$\Gamma = \{\text{τουλάχιστον ένα άτομο στο ζευγάρι ψηφίζει το κόμμα } A\}$

$P(\Gamma) = P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB) = 0{,}21+0{,}28-0{,}15 = 0{,}34$

Άσκηση 1.12

Παίρνουμε τυχαία τρεις αριθμούς, *χωρίς επανάθεση* από ένα δοχείο που περιέχει τους αριθμούς 1, 2, ..., 20. Να βρεθεί η πιθανότητα των παρακάτω γεγονότων:

i) Το άθροισμά τους είναι 11

ii) Το γινόμενό τους είναι άρτιο

iii) Ο μικρότερος είναι 4 ή 5.

Λύση

Οι δυνατές περιπτώσεις είναι όσες και οι διατάξεις των 20 πραγμάτων ανά 3 δηλαδή:

$$N_\Delta = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$$

i) Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι:

(1, 2, 8)	σε πλήθος		3!=6
(1, 3, 7)	»	»	3!=6
(1, 4, 6)	»	»	3!=6
(2, 3, 6)	»	»	3!=6
(2, 4, 5)	»	»	3!=6

$$N_E = 5 \cdot 6 = 30 \Rightarrow P = \frac{30}{6840} = 0{,}0044$$

ii) A = {το γινόμενο τριών αριθμών είναι άρτιος} ⇒

A = {ένας τουλάχιστον αριθμός είναι άρτιος} ⇒

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{10}{3}}{6840} = 0{,}9825$$

iii) Για να είναι ο 4 ο μικρότερος αριθμός, θα πρέπει οι υπόλοιποι δύο να ανήκουν στο $A_1=\{5, 6, \ldots, 20\}$. Για να είναι ο 5 ο μικρότερος αριθμός θα πρέπει οι υπόλοιποι δύο να ανήκουν στο $A_2 = \{6, 7, \ldots, 20\}$. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι:

$$\binom{16}{2}3! + \binom{15}{2}3! = 1350.$$

Άρα: $$P = \frac{1350}{6840} = 0{,}197.$$

Σημείωση: Το ίδιο αποτέλεσμα θα βρούμε αν χρησιμοποιήσουμε συνδυασμούς αντί για διατάξεις.

Άσκηση 1.13

Παίρνουμε τυχαία πέντε αριθμούς από ένα δοχείο που περιέχει τους αριθμούς 1, 2, ..., 15. Ποια είναι η πιθανότητα:

i) ο μεγαλύτερος να είναι 9

ii) ο μικρότερος να είναι το 3 και ο μεσαίος (σε μέγεθος) το 8

iii) οι δύο να είναι άρτιοι και οι τρεις περιττοί

Λύση

Οι δυνατές περιπτώσεις είναι $(15)_5 = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \Rightarrow N_\Delta=360360$

i) Για να είναι ο μεγαλύτερος αριθμός το 9 θα πρέπει οι υπόλοιποι τέσσερις να ανήκουν στο $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Τότε οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι:

$$\binom{8}{4}5! = 8400$$

Άρα $P = \dfrac{8400}{360360} = 0{,}0233$

ii) Για να είναι ο μικρότερος το 3 και ο μεσαίος το 8 θα πρέπει ο ένας αριθμός να είναι από το $A_1=\{4, 5, 6, 7\}$ και οι άλλοι δύο από το $A_2=\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Τότε οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι:

$$\binom{4}{1}\binom{7}{2}5! = 10080$$

Άρα $P = \frac{10080}{360360} = 0{,}028$

iii) Το να πάρουμε τρεις περιττούς αριθμούς και δύο άρτιους, ισοδυναμεί με το να πάρουμε τρεις αριθμούς από το σύνολο

$$A_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\},$$

και δύο από το σύνολο $A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.
Άρα οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι:

$$\binom{8}{3}\binom{7}{2}5! = 141120$$

Άρα $P = \frac{141120}{360360} = 0{,}3916$

Άσκηση 1.14

Στα 150 ποντίκια ενός εργαστηρίου 20 είναι μαύρα. Παίρνουμε 4 ποντίκια. Ποια η πιθανότητα να πάρουμε 1 μαύρο:

i) Με επανάθεση

ii) Χωρίς επανάθεση

Λύση

i) Με επανάθεση $\quad P = \frac{2}{15}\left(\frac{13}{15}\right)^3 = 0{,}07522$

ii) Χωρίς επανάθεση $\quad P = \dfrac{\binom{20}{1}\binom{130}{3}}{\binom{150}{4}} = 0{,}3532$

Άσκηση 1.15

Ένα φάρμακο σε μία αρρώστεια είναι αποτελεσματικό στις 75% των περιπτώσεων. Έξι ασθενείς παίρνουν το φάρμακο. Ποια είναι η πιθανότητα:

i) Όλοι να γίνουν καλά.

ii) 4 να γίνουν καλά.

iii) Τουλάχιστον 4 να γίνουν καλά.

Λύση

i) $P = \binom{6}{6}0{,}75^6\, 0{,}25^0 = 0{,}178$

ii) $P = \binom{6}{4}0{,}75^4\, 0{,}25^2 = 0{,}2966$

iii) P(τουλάχιστον 4 να γίνουν καλά) =

$$= \sum_{K=4}^{6} \binom{6}{K} 0{,}75^{K}\, 0{,}25^{6-K} = 0{,}2966+0{,}356+0{,}178 = 0{,}8306$$

Άσκηση 1.16

Η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι είναι 0,5. Μια οικογένεια έχει τρία παιδιά.

i) Ποια η πιθανότητα να έχει τουλάχιστον δύο αγόρια;

ii) Αν έχει τουλάχιστον ένα αγόρι ποια η πιθανότητα να έχει 2 αγόρια;

Λύση

A_κ = {η οικογένεια έχει κ αγόρια} κ=0, 1, 2, 3

B_κ = {η οικογένεια έχει τουλάχιστον κ αγόρια}

$A_\kappa \subset B_\kappa$

i) $P(B_2) = P(A_2)+P(A_3) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$

ii) $P(B_1) = 1-P(A_0) = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$$P(A_2/B_1) = \frac{P(B_1\,A_2)}{P(B_1)} = \frac{P(A_2)}{P(B_1)} = \frac{3/8}{7/8} = \frac{3}{7}$$

Άσκηση 1.17

Ο πατέρας έχει τον τύπο ΑΑ και η μητέρα τον τύπο Αα.

Ποια η πιθανότητα τα δύο από τα τρία παιδιά τους να έχουν τον τύπο Αα;

Λύση

A = {ένα παιδί είναι του τύπου Αα}

B = {δύο από τα τρία παιδιά είναι του τύπου Αα}

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

Άσκηση 1.18

i) Δείξτε ότι δύο γεγονότα Α, Β ξένα μεταξύ τους με P(A) > 0, P(B) > 0 δε μπορεί να είναι ανεξάρτητα

ii) Αν Α, Β ανεξάρτητα και P(A)>0, P(B)>0, τότε δε μπορεί να είναι ξένα

iii) Μας δίνουν $P(\bar{A}B)=0{,}3$, $P(B\Gamma)=0{,}4$, $P(\bar{B})=0{,}4$, $P(\bar{A}B\Gamma)=0{,}2$. Να υπολογιστεί η $P(B\bar{\Gamma})$, $P(AB\Gamma)$

iv) Δείξε: $P(A\Gamma\cup AB)\leq P(A)+P(\Gamma)$ για οποιαδήποτε γεγονότα A, B, Γ.

Λύση

i) $$\left.\begin{array}{l} AB=\varnothing \Rightarrow P(AB)=0 \\ P(A)>0,\ P(B)>0 \Rightarrow P(A)\cdot P(B)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(AB)\neq P(A)\,P(B)$$

ii) A, B ανεξάρτητα $\Rightarrow P(AB) = P(A)\cdot P(B)>0 \Rightarrow AB\neq\varnothing$

iii) $P(B\bar{\Gamma}) = P(B)-P(B\Gamma) = 0{,}2$ διότι, $P(B) = P(B\Gamma)+P(B\bar{\Gamma})$

$P(AB\Gamma) = P(B\Gamma)-P(\bar{A}B\Gamma) = 0{,}2$

iv) $P(A\Gamma\cup AB) = P(A\Gamma)+P(AB)-P(AB\Gamma) =$

$$= P(\Gamma)-P(\bar{A}\Gamma)+P(A)-P(A\bar{B})-P(AB\Gamma) \Rightarrow$$

$\Rightarrow P(A\Gamma\cup AB) < P(A)+P(\Gamma)$.

Άσκηση 1.19

Πόσα παιδιά πρέπει να έχει μια οικογένεια ώστε να έχει ένα τουλάχιστον αγόρι και ένα τουλάχιστον κορίτσι με πιθανότητα 95%.

Λύση

A = {Η οικογένεια με n παιδιά έχει τουλάχιστον ένα αγόρι και τουλάχιστον ένα κορίτσι}

A_i = {υπάρχουν i αγόρια στην οικογένεια}

K_i = {υπάρχουν i κορίτσια στην οικογένεια}

$$A = \overline{A_0\cup K_0} \Rightarrow P(A) = 1-P(A_0\cup K_0) = 1-P(A_0)-P(K_0) = 1-\frac{2}{2^n} \Rightarrow$$

$$1-\frac{2}{2^n}\geq 0{,}95 \Rightarrow \frac{2}{2^{n-1}}\leq 0{,}05 \Rightarrow 2^{n-1}\geq 20 \Rightarrow n\geq 6$$

Άσκηση 1.20

Σ' ένα δοχείο Δ_1 υπάρχουν 5 μαύρα και 4 λευκά σφαιρίδια. Σ' άλλο Δ_2 υπάρχουν 7 μαύρα και 10 λευκά. Παίρνουμε 1 σφαιρίδιο από το Δ_1 και το τοποθετούμε στο Δ_2. Μετά παίρνουμε 2 σφαιρίδια από το Δ_2.

i) Ποια η πιθανότητα να πάρουμε δύο λευκά;

ii) Αν πήραμε ένα μαύρο και ένα λευκό ποια η πιθανότητα να είχαμε μεταφέρει ένα μαύρο από το $Δ_1$ στο $Δ_2$;

Η απάντηση στα (i) και (ii) να δοθεί όταν η δειγματοληψία από το $Δ_2$ γίνεται α) με επανάθεση και β) χωρίς επανάθεση.

Λύση

$A_1 = \{$μεταφέρουμε λευκό σφαιρίδιο από το $Δ_1$ στο $Δ_2\}$

$M_1 = \{$μεταφέρουμε μαύρο σφαιρίδιο από το $Δ_1$ στο $Δ_2\}$

$A_{2i} = \{$παίρνουμε i λευκά σφαιρίδια από το $Δ_2\}$

$M_{2i} = \{$παίρνουμε i μαύρα σφαιρίδια από το $Δ_2\}$

α) Με επανάθεση

i) $P(A_{22}) = P(A_{22}/A_1)\, P(A_1)+P(A_{22}/M_1)\, P(M_1) =$

$$= \left(\frac{11}{18}\right)^2 \frac{4}{9} + \left(\frac{10}{18}\right)^2 \frac{5}{9} = 0{,}34$$

ii) $$P(M_1/A_{21}) = \frac{P(A_{21}/M_1)\, P(M_1)}{P(A_{21}/A_1)\, P(A_1)+P(A_{21}/M_1)\, P(M_1)} =$$

$$= \frac{2\cdot\frac{8}{18}\frac{10}{18}\frac{5}{9}}{2\cdot\frac{7}{18}\frac{11}{8}\frac{4}{9}+2\cdot\frac{8}{18}\frac{10}{18}\frac{5}{9}} = 0{,}565$$

β) Χωρίς επανάθεση

i) $$P(A_{22}) = \frac{\binom{7}{0}\binom{11}{2}}{\binom{18}{2}}\frac{4}{9} + \frac{\binom{8}{0}\binom{10}{2}}{\binom{18}{2}}\frac{5}{9} = 0{,}305$$

ii) $$P(M_1/A_{21}) = \frac{\binom{8}{1}\binom{10}{1}\frac{5}{9}}{\binom{7}{1}\binom{11}{1}\frac{4}{9}+\binom{8}{1}\binom{10}{1}\frac{5}{9}} = 0{,}565$$

Άσκηση 1.21

Μέσα σ' ένα δοχείο Α υπάρχουν 5 λευκά και 8 μαύρα σφαιρίδια και στο δοχείο Β υπάρχουν 3 λευκά και 6 μαύρα. Παίρνουμε τυχαία ένα δοχείο και επιλέγουμε τυχαία 2 σφαιρίδια από το δοχείο.

i) Ποια η πιθανότητα να πάρουμε 1 μαύρο και 1 άσπρο (χωρίς