

ΚΩΝ/ΝΟΣ - ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ Ε. ΜΠΟΥΖΑΚΗΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ DR. - ING. HABIL. ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

**ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ
ΚΑΙ
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΗΧΑΝΩΝ**

 **ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ**
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1997

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1 Μαθηματική περιγραφή της ταλαντωτικής συμπεριφοράς.....	2
1.2 Στιβαρότητα υλικών και κατασκευών.....	5
1.3 Απόσβεση υλικών κατασκευών.....	6
2. ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΕΝΟΣ ΒΑΘΜΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ	11
2.1 Ελεύθερες ταλαντώσεις ενός βαθμού ελευθερίας γραμμικών μοντέλων.....	11
2.1.1 Ελεύθερες ταλαντώσεις ενός βαθμού ελευθερίας γραμμικών μοντέλων χωρίς απόσβεση.....	13
2.1.2 Ελεύθερες ταλαντώσεις ενός βαθμού ελευθερίας γραμμικών μοντέλων με απόσβεση.....	15
2.1.2.1 Ελεύθερη ταλάντωση με ασθενή απόσβεση.....	18
2.1.2.2 Ελεύθερη ταλάντωση με μέτρο απόσβεσης ίσο με τη μονάδα.....	23
2.1.2.3 Ελεύθερη ταλάντωση με ισχυρή απόσβεση.....	24
2.2 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις ενός βαθμού ελευθερίας.....	25
2.2.1 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με αρμονική διέγερση γραμμικών μοντέλων ενός βαθμού ελευθερίας.....	28
2.2.1.1 Αρμονικές διεγέρσεις με σταθερό εύρος.....	28
2.2.1.1.1 Μόνιμη κατάσταση εξαναγκασμένης ταλάντωσης με απόσβεση.....	31
2.2.1.1.2 Μεταβατική κατάσταση εξαναγκασμένης ταλάντωσης με απόσβεση.....	35
2.2.1.1.3 Μεταβατική και μόνιμη κατάσταση εξαναγκασμένης ταλάντωσης χωρίς απόσβεση.....	37
2.2.1.2 Αρμονικές διεγέρσεις με εύρος εξαρτώμενο από τη συχνότητα διέγερσης.....	40
2.2.1.3 Αρμονικές διεγέρσεις μετατόπισης.....	42
2.2.1.4 Διεγέρσεις μορφής αθροίσματος αρμονικών όρων.....	46
2.2.2 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με περιοδική διέγερση γραμμικών μοντέλων ενός βαθμού ελευθερίας.....	51
2.2.2.1 Ανάλυση περιοδικής συνάρτησης κατά Fourier.....	51
2.2.2.2 Προσδιορισμός γενικής λύσης της μετατόπισης.....	55
2.2.3 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απεριοδική διέγερση γραμμικών μοντέλων ενός βαθμού ελευθερίας.....	59
2.2.3.1 Προσδιορισμός της συνάρτησης βάρους.....	60
2.2.3.2 Υπολογισμός μερικής λύσης με τη βοήθεια του ολοκληρώματος αναδίπλωσης (Ολοκλήρωμα Duhamel).....	61

2.2.3.3 Υπολογισμός μερικής λύσης με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier σε συνδυασμό με το θεώρημα αναδίπλωσης.....	69
2.2.3.3.1 Μετασχηματισμός Fourier απεριοδικής συνάρτησης.....	69
2.2.3.3.2 Προσδιορισμός της μερικής λύσης-θεώρημα αναδίπλωσης.....	74
3 ΜΕΛΕΤΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΒΑΘΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ.....	79
3.1 Μεθοδολογίες κατά την προσεγγιστική μελέτη των ταλαντώσεων κατασκευών.....	80
3.2 Μελέτη της ταλαντωτικής συμπεριφοράς μηχανικών διατάξεων, με τη βοήθεια διάκριτων μοντέλων.....	83
3.2.1 Παραδείγματα δημιουργίας διάκριτων μοντέλων.....	86
3.3 Κατάστρωση εξισώσεων δυναμικής ισορροπίας των στοιχείων, ενός διάκριτου μοντέλου.....	90
3.3.1 Κατάστρωση εξισώσεων δυναμικής ισορροπίας του μονοδιάστατου εφελκυστικού-θλιπτικού στοιχείου σχάρας, με ασυνεχώς κατανεμημένη μάζα.....	92
3.3.1.1 Ακριβής επίλυση των διαφορικών εξισώσεων της δυναμικής ισορροπίας του εφελκυστικού θλιπτικού στοιχείου, ασυνεχώς κατανεμημένης μάζας και προσδιορισμός του μητρώου του μεταφοράς.....	94
3.3.1.2 Προσεγγιστική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων της δυναμικής ισορροπίας του εφελκυστικού θλιπτικού στοιχείου, ασυνεχώς κατανεμημένης μάζας και προσδιορισμός του μητρώου του μεταφοράς.....	95
3.3.2 Κατάστρωση εξισώσεων δυναμικής ισορροπίας του καμπτικού στοιχείου ασυνεχώς κατανεμημένης μάζας, με δύο βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο και προσδιορισμός του μητρώου του μεταφοράς.....	96
3.4 Προσδιορισμός των μητρώων στιβαρότητας στοιχείων, από τα μητρώα τους μεταφοράς.....	99
3.5 Κατάστρωση εξισώσεων δυναμικής ισορροπίας ενός διάκριτου μοντέλου.....	105
3.6 Κατάστρωση των ολικών μητρώων στιβαρότητας και απόσβεσης, βάσει των αντιστοιχών μητρώων των επί μέρους στοιχείων (Direct - Stiffness - Method), σε μοντέλο με ένα βαθμό ελευθερίας ανά κόμβο.....	108
3.7 Κατάστρωση των ολικών μητρώων αδρανείας, στιβαρότητας και απόσβεσης, βάσει των αντιστοιχών μητρώων των επί μέρους στοιχείων (Direct-Stiffness-Method), σε μοντέλα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο.....	110
3.8 Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων, των μητρώων στιβαρότητας των στοιχείων ενός διάκριτου μοντέλου.....	116
3.9 Προσδιορισμός της θέσης της στατικής ισορροπίας του μοντέλου μιας κατασκευής.....	123

3.9.1	Προσδιορισμός των φορτίσεων των κόμβων ενός μοντέλου μιας κατασκευής, βάσει των εξωτερικών φορτίσεων και του ίδιου βάρους των στοιχείων.....	124
3.9.2	Προσδιορισμός της θέσης της στατικής ισορροπίας των κόμβων του μοντέλου μιας κατασκευής.....	127
3.10	Κατάστρωση εξισώσεων δυναμικής ισορροπίας με τη βοήθεια των συντελεστών επιρροής.....	130
3.11	Περιγραφή της ταλαντωτικής συμπεριφοράς κατασκευών μέσω του προσδιορισμού συναρτήσεων μεγεθύνσεώς τους.....	132
3.12	Παράδειγμα κατάστρωσης του μητρώου στιβαρότητας και αδρανείας του διάκριτου μοντέλου μίας κατασκευής και υπολογισμούς της θέσης της στατικής ισορροπίας της.....	135
3.12.1	Κατάστρωση των μητρώων αδρανείας και στιβαρότητας.....	135
3.12.2	Υπολογισμός της θέσης της στατικής ισορροπίας.....	142
3.13	Περιορισμός διαστάσεων μητρώων.....	144
3.13.1	Περιορισμός διαστάσεων μητρώων βάσει γνωστών κινηματικών συνθηκών.....	144
3.13.2	Περιορισμός διαστάσεων μητρώων βάσει γνωστών δυναμικών συνθηκών (συμπύκνωση μητρώου).....	145
4.	ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ.....	149
4.1	Επίλυση των εξισώσεων της δυναμικής ισορροπίας μέσω ανάλυσης των ιδιομορφών.....	151
4.1.1	Ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση.....	151
4.1.2	Ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση.....	156
4.1.2.1	Ελεύθερη ταλάντωση πολλών βαθμών ελευθερίας, με μητρώο απόσβεσης, γραμμικό συνδυασμό, του μητρώου μάζας και του μητρώου στιβαρότητας.....	157
4.1.2.2	Ελεύθερη ταλάντωση πολλών βαθμών ελευθερίας με γενικό μητρώο απόσβεσης.....	159
4.1.2.2.1	Επίλυση της δευτεροβαθμίου μητρωϊκής εξίσωσης δυναμικής ισορροπίας, μέσω αναγωγής της σε πρωτοβάθμια.....	159
4.1.2.2.2	Επίλυση της δευτεροβαθμίου μητρωϊκής εξίσωσης δυναμικής ισορροπίας μέσω αναγωγής της σε πρωτοβάθμιο κατά Duncan.....	164
4.1.3	Εξαναγκασμένη ταλάντωση με περιοδική διέγερση. Γενικός τρόπος προσδιορισμού μιας μερικής λύσης.....	169
4.1.3.1	Εξαναγκασμένη ταλάντωση με αρμονική διέγερση και μητρώο απόσβεσης γραμμικό συνδυασμό του μητρώου μάζας και του μητρώου στιβαρότητας.....	171
4.1.3.2	Εξαναγκασμένη ταλάντωση με αρμονική διέγερση και γενικό μητρώο αποσβέσεως.....	174
4.1.4	Εξαναγκασμένη ταλάντωση με απεριοδική διέγερση.....	175
4.1.4.1	Εξαναγκασμένη ταλάντωση με μητρώο απόσβεσης γραμμικό συνδυασμό του μητρώου μάζας και του μητρώου στιβαρότητας.....	175

4.1.4.2	Εξαναγκασμένη ταλάντωση πολλών βαθμών ελευθερίας με γενικό μητρώο απόσβεσης.....	177
4.1.5	Παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου επίλυσης εξισώσεων της δυναμικής ισορροπίας, μέσω της ανάλυσης των ιδιομορφών.....	178
4.1.5.1	Ελεύθερη ταλάντωση, χωρίς απόσβεση γραμμικού μοντέλου.....	178
4.1.5.2	Εξαναγκασμένη ταλάντωση, χωρίς απόσβεση, γραμμικού μοντέλου.....	186
4.1.5.3	Ελεύθερη ταλάντωση με γενικό μητρώο απόσβεσης.....	187
4.1.5.3.1	Εφαρμογή της διαδικασίας που περιγράφεται στην παράγραφο 4.1.2.2.1.....	188
4.1.5.3.2	Εφαρμογή της μεθόδου κατά Duncan της παραγράφου 4.1.2.2.2.....	191
4.1.5.4	Εξαναγκασμένη ταλάντωση με αρμονική διέγερση και γενικό μητρώο απόσβεσης.....	194

1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κατά τη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς διακρίνονται γενικά δύο είδη μηχανών. Αυτές που υπό συνθήκες λειτουργίας διατηρούν τη γεωμετρική τους μορφή, την περιγραφόμενη στα κατασκευαστικά σχέδια καθώς και μηχανές, που υπό συνθήκες λειτουργίας παραμορφώνονται. Σαν παραμόρφωση δεν εννοείται η αλλαγή της γεωμετρίας λόγω εξάσκησης μη μεταβαλλόμενων χρονικά φορτίων, η οποία μπορεί να υπολογιστεί με εφαρμογή μεθόδων της στατικής. Σαν αλλαγή της γεωμετρίας εννοείται η προκαλούμενη από χρονικά μεταβαλλόμενα φορτία, ή λόγω κινήσεων της κατασκευής κατά την επάνοδό της στη θέση της στατικής ισορροπίας της, μετά από εκτροπή της από αυτή.

Οι απαραμόρφωτες μηχανές αποτελούν το αντικείμενο της δυναμικής των μηχανών, ενώ αυτές που είναι δυνατόν να παραμορφώνονται, μελετώνται στη γνωστική περιοχή των ταλαντώσεων των μηχανών.

Τόσο οι στατικές όσο και οι δυναμικές παραμορφώσεις δημιουργούνται λόγω της πεπερασμένης στιβαρότητας των κατασκευών. Ειδικά σε μηχανολογικές κατασκευές, η επιδίωξη της μείωσης του βάρους τους με σκοπό κυρίως την μείωση του κόστους, οδηγεί σε περιορισμένες στιβαρότητες. Οι μικρές στιβαρότητες αποτελούν ευνοϊκή προϋπόθεση για τη δημιουργία δυναμικών παραμορφώσεων. Η αποφυγή τους αποτελεί σημαντικό πρόβλημα, που συχνά απαντάται και αντιμετωπίζεται τόσο κατά την κατασκευαστική σχεδιομελέτη, όσο και κατά τη λειτουργία των διαφόρων μηχανικών διατάξεων.

Οι μηχανικές παραμορφώσεις των κατασκευών δεν παραμένουν σταθερές, αλλά έχουν τη μορφή παλινδρομικών κινήσεων, που ονομάζονται ταλαντώσεις, γύρω από τη θέση της στατικής ισορ-

ροπίας.

Η μελέτη της ταλαντωτικής συμπεριφοράς των κατασκευών στοχεύει αφ' ενός στον προσδιορισμό της γεωμετρίας της κατασκευής υπό συνθήκες λειτουργίας, αφ' ετέρου στον υπολογισμό των συνθηκών λειτουργίας, υπό τις οποίες στην κατασκευή δημιουργούνται σημαντικά εύρη παραμόρφωσης (καταστάσεις συντονισμού).

1.1 Μαθηματική περιγραφή της ταλαντωτικής συμπεριφοράς

Υπάρχουν διάφορες μεθοδολογίες για την μαθηματική περιγραφή της ταλαντωτικής συμπεριφοράς μηχανικών διατάξεων.

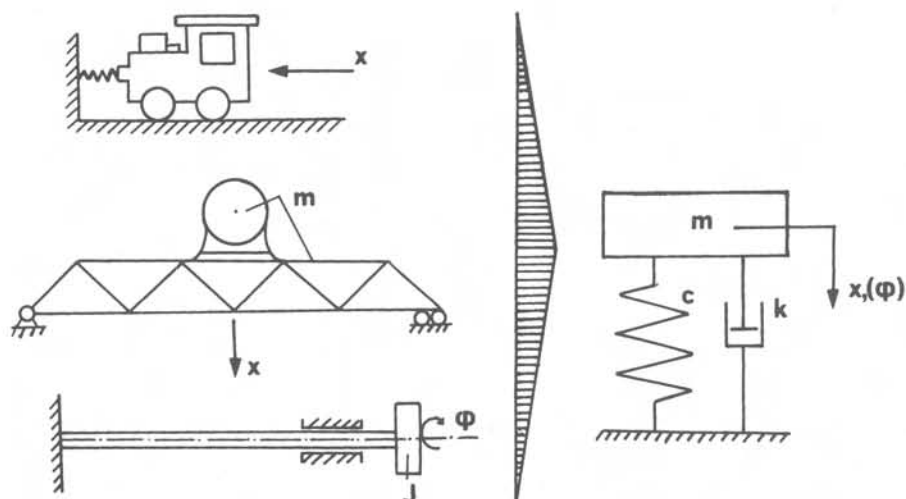
Μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον και ευρεία εφαρμογή έχουν σήμερα, λόγω της χρησιμοποίησης των ηλεκτρονικών υπολογιστών, μεθοδολογίες κατά τις οποίες η κατασκευή περιγράφεται με τη βοήθεια ενός προσομοιωτικού προτύπου (μοντέλο). Το μοντέλο προσεγγιστικά έχει ισοδύναμες ιδιότητες με την κατασκευή, σχετικά με τα παρακάτω βασικά χαρακτηριστικά μεγέθη της:

- την αδράνεια
- την στιβαρότητα
- την απόσβεση
- την μετατόπιση, ή ανάλογα με την περίπτωση την περιστροφή στην κατεύθυνση, ή στις κατευθύνσεις (βαθμοί ελευθερίας) των ταλαντωτικών κινήσεων.

Τα μεγέθη αυτά αναφέρονται στη συνολική κατασκευή, ή και σε επιμέρους μέλη της.

Στο **σχήμα 1.1** εικονίζονται τρία παραδείγματα υποκατάστασης της πραγματικής γεωμετρίας κατασκευών, με προσομοιωτικά πρότυπα, προκειμένου να μελετηθεί η ταλαντωτική συμπεριφορά τους. Και τα τρία μοντέλα επιτρέπουν κίνηση μόνο σε μία κατεύθυνση, δηλαδή είναι ενός βαθμού ελευθερίας.

Στις πρώτες δύο περιπτώσεις, επειδή ενδιαφέρει ο προσδιορισμός της κίνησης και των λόγω αυτής προκαλουμένων παραμορφώσεων στην κατεύθυνση x , του οχήματος μεν κατά την πρόσκρουσή του σε σταθερό εμπόδιο, της γερανογέφυρας δε κατά τη λειτουργία του κινητήρα, το χαρακτηριστικό μέγεθος της αδράνειας εκφράζεται από την μεταφορικά μετακινούμενη μάζα m των κατασκευών αυτών, στην ορισθείσα κατεύθυνση x . Οι μάζες αυτές



Σχήμα 1.1. Προσομοίωση κατασκευών με πρότυπο (μοντέλο) ενός βαθμού ελευθερίας για τη μελέτη της ταλαντωτικής συμπεριφοράς τους.

θεωρούνται ότι κατά την κίνηση δεν παραμορφώνονται.

Στο τρίτο παράδειγμα επειδή ενδιαφέρει η παραμόρφωση της ατράκτου στην κατεύθυνση ϕ , κατά πιθανή ταλαντωτική περιστροφική κίνηση του λειαντικού τροχού, η αδράνεια εκφράζεται με τη μαζική ροπή αδρανείας του λειαντικού τροχού, ως προς τον άξονα της περιστροφής. Εν προκειμένω ο λειαντικός τροχός θεωρείται απαραμόρφωτος και η άτρακτος μηδενικής μάζας.

Η στιβαρότητα των κατασκευών στα πρώτα δύο παραδείγματα περιγράφεται από τη σταθερά ελατηρίου c , που εκφράζει τη δύναμη, την απαιτούμενη να εξασκηθεί κατά την κατεύθυνση x στην κατασκευή, για να παραμορφωθεί κατά μια μονάδα μήκους στην ίδια κατεύθυνση.

Στην περίπτωση της ατράκτου του λειαντικού τροχού, η στιβαρότητά της εκφράζεται με τη σταθερά ελατηρίου σε περιστροφική κατεύθυνση. Η σταθερά αυτή υποδηλώνει αντίστοιχα τη ροπή που πρέπει να εξασκηθεί, για να παραμορφωθεί η άτρακτος κατά μια μονάδα γωνιακής (περιστροφικής) μετατόπισης.

Συνήθως, επειδή οι μετατοπίσεις, ή οι περιστροφές, δεν εξαρτώνται γραμμικά από τις προκαλούσες αυτές φορτίσεις, για την απλοποίηση των μαθηματικών σχέσεων που περιγράφουν τη δυναμική ισορροπία, θεωρείται ότι υφίσταται ένας γραμμικός νόμος αλληλοεξάρτησης μεταξύ φόρτισης και μετακίνησης. Έτσι οι αντί-

στοιχεις σταθερές ελατηρίου σε μεταφορική ή περιστροφική κίνηση έχουν τιμές, μη εξαρτώμενες από το μέγεθος της φόρτισης. Σε επόμενες παραγράφους δίδονται περισσότερες επεξηγήσεις για την αλληλοεξάρτηση αυτή.

Τέλος με το χαρακτηριστικό μέγεθος της απόσβεσης (σταθερά k) περιγράφεται η μετατροπή της κινητικής ενέργειας, που βάσει αυτής κάποια κατασκευή, ή τα μέλη της εκτελούν ταλαντωτικές κινήσεις, συνήθως σε θερμότητα και τοιουτοτρόπως εκφράζεται η δυνατότητα αποβολής της από το ταλαντούμενο σύστημα.

Ο πλέον χρησιμοποιούμενος νόμος περιγραφής του φαινομένου αυτού είναι επίσης γραμμικός και υποδηλώνει, ότι λόγω της απόσβεσης δημιουργείται μια δύναμη, η οποία παράγει το έργο, που αποβάλεται από το ταλαντούμενο σύστημα. Η δύναμη αυτή είναι ανάλογη της ταχύτητας της μετατόπισης (βισκοαπόσβεση). Σταθερά αναλογίας είναι εν προκειμένω η σταθερά απόσβεσης k . Η φυσική έννοια της απόσβεσης και μεθοδολογίες περιγραφής της αναφέρονται σε επόμενες παραγράφους.

Το μοντέλο μιας κατασκευής για το οποίο ισχύουν οι παραπάνω παραδοχές γραμμικών αλληλοεξαρτήσεων μεταξύ της στιβαρότητας και της απόσβεσης αντίστοιχα με τη μετατόπιση και με την ταχύτητα της μετατόπισης, χαρακτηρίζεται σαν γραμμικό.

Η μαθηματική σχέση που εκφράζει την ισορροπία όλων των δυνάμεων που εξασκούνται στη μάζα του μοντέλου κατά την κίνησή της, είναι της μορφής:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = f(t) \quad (1.1)$$

Η σχέση αυτή, βασιζόμενη στην αρχή του d' Alembert, εκφράζει την ισορροπία ανά πάσα χρονική στιγμή μεταξύ των δυνάμεων αδρανείας, απόσβεσης και παραμόρφωσης, με τις εξωτερικά εξασκούμενες φορτίσεις. Από μαθηματική άποψη η σχέση αυτή είναι μια ομογενής δευτεροβάθμια διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (σκληρογραμμική).

Μαθηματικές σχέσεις που περιγράφουν παρόμοιες αλληλοεξαρτήσεις ονομάζονται εξισώσεις δυναμικής ισορροπίας. Η κατάστρωσή τους και η επίλυσή τους αποτελεί το αντικείμενο επομένων κεφαλαίων. Ο προσδιορισμός της χρονικής συμπεριφοράς της μετατόπισης, επιτρέπει τον υπολογισμό της μεταβολής των προκαλούμενων τάσεων σε διάφορα μέλη μιας κατασκευής που είναι απαραίτητες για την εκτίμηση του συντελεστή ασφαλείας της σε κόπωση.

1.2 Στιβαρότητα υλικών και κατασκευών

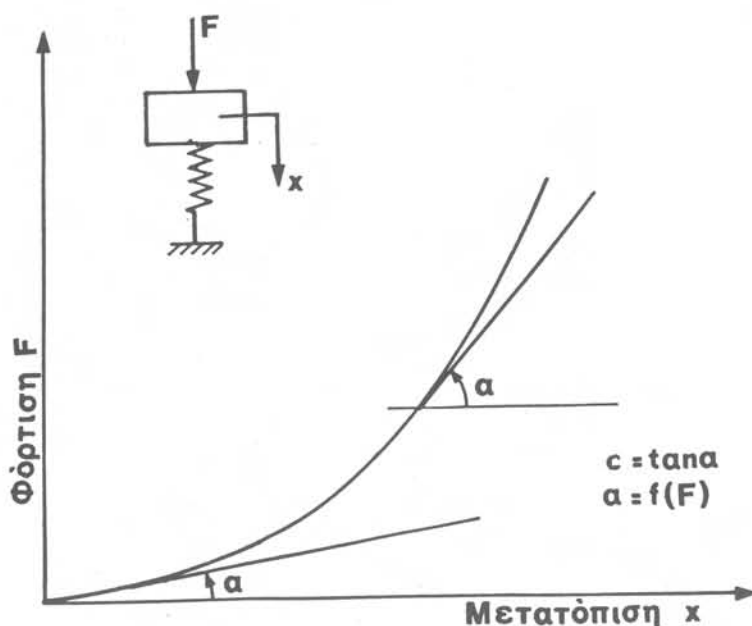
Γενικά η συμπεριφορά παραμόρφωσης ενός υλικού στην περιοχή της ελαστικής παραμόρφωσής του, μπορεί με ικανοποιητική ακρίβεια να περιγραφεί με τη βοήθεια γραμμικού νόμου (νόμος Hook). Για το λόγο αυτό, λαμβάνοντας υπόψη τη σταθερά ελατηρίου c , που εκφράζει την στιβαρότητα σε ένα σημείο και σε ορισμένη κατεύθυνση μιας κατασκευής, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση:

$$F = cx \quad (1.2)$$

Η εφαπτομένη της γωνίας κλίσης της καμπύλης της γραφικής παράστασης της φόρτισης, σαν συνάρτηση της μετατόπισης, εκφράζει την τιμή της σταθεράς του ελατηρίου, (βλέπε **Σχήμα 1.2**).

Όπως και στο σχήμα 1.2 φαίνεται, η τιμή της σταθεράς ελατηρίου μόνο σε μικρές επιμέρους περιοχές τιμών της μετατόπισης μπορεί να θεωρηθεί αμετάβλητη.

Για μεγαλύτερες τιμές της μετατόπισης σε πραγματικές κατασκευές, λόγω αλλαγής της γεωμετρίας και τοιουτοτρόπως των χαρακτηριστικών της στιβαρότητας, η σταθερά c εξαρτάται από το μέγεθος της φόρτισης.

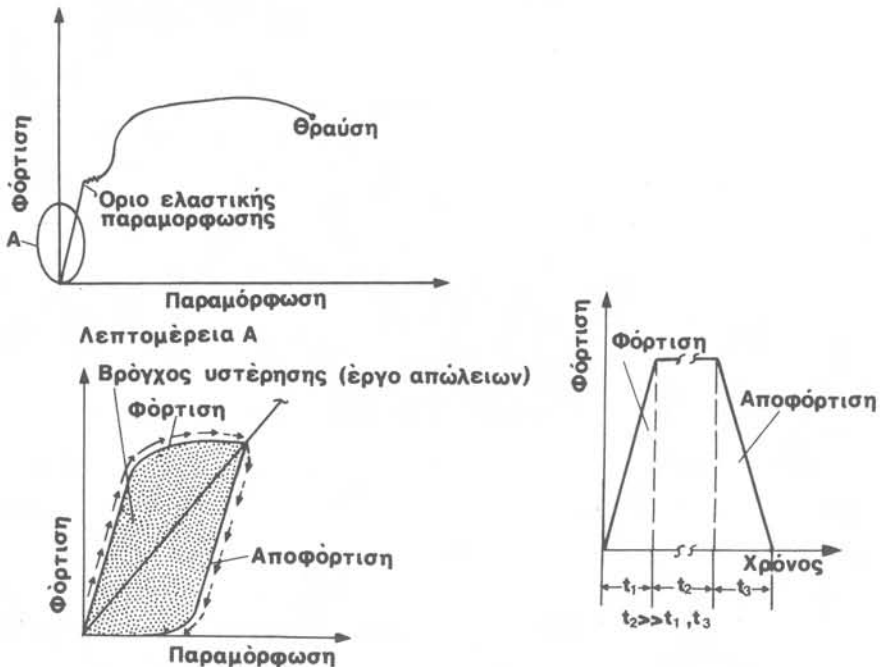


Σχήμα 1.2. Χαρακτηριστική εξάρτηση της παραμόρφωσης από τη φόρτιση

Για λόγους απλοποίησης των εξισώσεων της δυναμικής ισορροπίας η τιμή της σταθεράς ελατηρίου θεωρείται αμετάβλητη, εκφράζουσα την συμπεριφορά της στιβαρότητας μόνο σε ορισμένη περιοχή τιμών φόρτισης. Συγχρόνως η παραδοχή αυτή ανταποκρίνεται στην πρακτική επιδίωξη, του να προσδιορισθεί η ταλαντωτική συμπεριφορά μιας κατασκευής για μικρές περιοχές τιμών παραμορφώσεων, αφού μεγάλες παραμορφώσεις πρέπει να αποφεύγονται. Σημαντικό ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης, ο προσδιορισμός των συνθηκών λειτουργίας, οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν σε σημαντικά εύρη παραμορφώσεων, δηλαδή σε καταστάσεις συντονισμού.

1.3 Απόσβεση υλικών κατασκευών

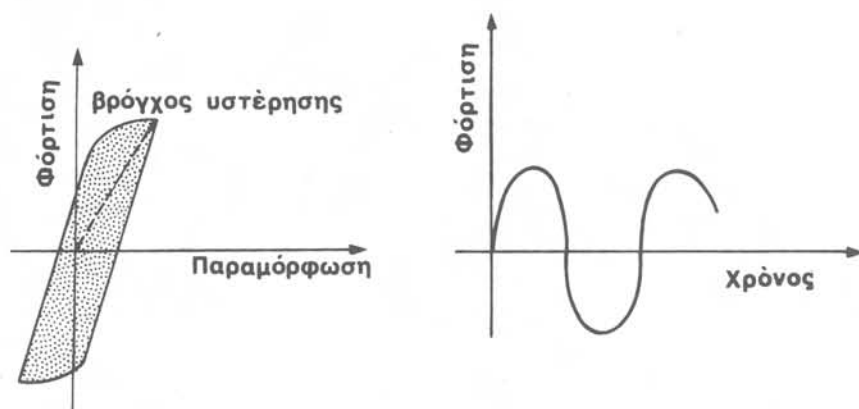
Γενικά σε κάθε υλικό καταπονούμενο δυναμικά, με τιμές φορτίων που προκαλούν μη μόνιμες, δηλαδή ελαστικές παραμορφώσεις παρουσιάζεται το παρακάτω περιγραφόμενο φαινόμενο της ελαστικής υστέρησης [1].



Σχήμα 1.3: Ελαστική υστέρηση σε γρήγορη φόρτιση-αποφόρτιση υλικών.

Όπως ενδεικτικά στο **σχήμα 1.3** φαίνεται, κατά γρήγορη φόρτιση π.χ. εφελκυσμού, η ελαστική παραμόρφωση, λόγω αδρανείας του υλικού, δεν ακολουθεί γραμμικό νόμο. Αυτό συνεπάγεται πτώση της εσωτερικής τάσης του υλικού με σύγχρονη ψύξη, μέχρι να αποκατασταθεί η προβλεπόμενη από τη φόρτιση μη μόνιμη παραμόρφωση.

Κατά γρήγορη αποφόρτιση, λόγω αδρανείας του υλικού, δεν ακολουθείται πάλι γραμμικός νόμος (βλέπε σχήμα 1.3), με αποτέλεσμα τη θέρμανση του υλικού. Έτσι ένας κύκλος φόρτισης-αποφόρτισης, οδηγεί σε απώλεια έργου, που αντιστοιχίζεται στην αραιά σκιαγραφημένη περιοχή του σχήματος 1.3. Στο **σχήμα 1.4** φαίνεται η δημιουργία ενός βρόγχου ελαστικής υστέρησης, κατά αρμονικά μεταβαλλόμενη φόρτιση-διέγερση ενός υλικού.



Σχήμα 1.4: Δημιουργία βρόγχου υστέρησης κατά αρμονική διέγερση.

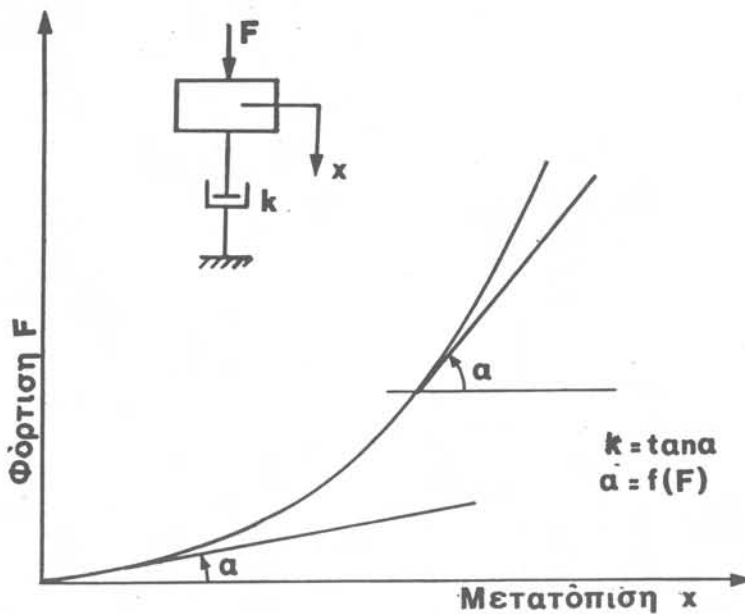
Οι επιφάνειες των βρόγχων αυτών και κατά συνέπεια η ιδιότητα απόσβεσης, εξαρτάται από το μέγεθος την ταχύτητα μεταβολής της φόρτισης, από την κρυσταλλογραφική δομή των υλικών, καθώς και από το συνολικό αριθμό κύκλων φορτίσεων (βλέπε **σχήμα 1.5**). Η τελευταία εξάρτηση εξηγεί και την διαφορετική συμπεριφορά απόσβεσης κατασκευών δυναμικά καταπονομένων, και συγκεκριμένα την αύξησή της, μετά την πάροδο αρκετού χρόνου λειτουργίας τους.

Η απόσβεση λόγω ελαστικής υστέρησης, σε συνδιασμό με αποσβέσεις λόγω τριβών μεταξύ μελών, ή και πλαστικών παραμορφώσεων μελών, οδηγεί στη δημιουργία της συνολικής απόσβεσης μιας μηχανικής διάταξης κατά την λειτουργία της.



Αριθμός εναλλαγών φορτίσεως n ,
 περιοχών που αντιστοιχεί
 στους I, II, III
 $n_{III} > n_{II} > n_I$ ($n_I = 1$)

Σχήμα 1.5. Βρόγχοι υστέρησης κατά τη διάρκεια του χρόνου λειτουργίας μιας κατασκευής.



Σχήμα 1.6

Για τη μαθηματική περιγραφή της απόσβεσης υλικού γίνονται διάφορες παραδοχές. Πρακτικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η παραδοχή, ότι η δύναμη απόσβεσης είναι ανάλογη της ταχύτητας της μετατόπισης (βισκοαπόσβεση) (βλέπε **σχήμα 1.6**).

$$F_k = k \dot{x} \quad (1.3)$$

Ο νόμος αυτός χρησιμοποιείται κυρίως κατά τη μελέτη της ταλαντωτικής συμπεριφοράς κατασκευών. Η σταθερά της απόσβεσης k , σύμφωνα με τα προηγουμένως αναφερθέντα, έχει διαφορετικές τιμές για n διάφορες ταχύτητες μεταβολής της φόρτισης, δηλαδή για διαφορετικές συχνότητες διέγερσης, καθώς και διαφορετικά μεγέθη της φόρτισης. Περισσότερες πληροφορίες για την απόσβεση καθώς και για τον πειραματικό προσδιορισμό της, δίνονται στο τεύχος των εργαστηριακών ασκήσεων [2].